

东西方乐律学研究及发展历程

李玫 著

中央音乐学院出版社

责任编辑：俞人豪
封面设计：金色池塘工作室
golden19@126 com





定价：32.00元

东西方乐律学

研究及发展历程

李玫 著

中央音乐学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

东西方乐律学研究及发展历程/李玫著. —北京：中央音乐学院出版社，2006.9

ISBN 978-7-81096-166-0

Ⅰ.东...　Ⅱ.李...　Ⅲ.律学—研究—世界　Ⅳ.J612

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 106894 号

东西方乐律学研究及发展历程　　李　玫著

出版发行：中央音乐学院出版社
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092 毫米　16 开　　印张：17.75
印　　刷：北京宏伟双华印刷有限公司
版　　次：2007 年 4 月第 1 版　　2007 年 4 月第 1 次印刷
印　　数：1—2,000 册
书　　号：ISBN 978-7-81096-166-0
定　　价：32.00 元

中央音乐学院出版社　北京市西城区鲍家街 43 号　邮编：100031
发行部：（010）66418248　66415711（传真）

序　言

赵宋光

在当代中国，以我的同辈们为例，音乐学家们有机遇跨进律学这一学科者，大多数仰仗杨荫浏先生和缪天瑞先生两位前辈的著述。惟独童忠良同志有幸于20世纪50至60年代在莱比锡音乐学院亲聆欧洲的教授讲授律学。自从30年代我国引进欧洲的音乐教育制度以来，直到80年代中期，在我国的各大音乐学院里都未曾开设律学课程。这究竟是律学学科的不幸，还是音乐教育的不幸？也许是这两种不幸相加导致的几代音乐家的不幸。

今天，我们把律学这一学科置于人类文明史的大视野和长历程中来重新观照，才得以从它稀疏而断续的足迹里感受到它存在的必然和生机的顽强。中华文化圈、印度文化圈和环地中海文化圈，曾是人类认知音律规律性的三个文明源头，各不相谋同时萌生在先，在不同成长阶段互相交汇在后。曾侯乙墓向我们透露了先秦的繁荣，人们已经熟知。从东汉到隋唐几百年间，由于龟兹音乐文化的存在，中华和印度这两种律学传统得以会面汇合。印度和环地中海两种律学传统的会面，则得机缘于茨冈（吉卜赛）民系在西亚、南欧、北非的流浪。环地中海文化圈对于律学的开发，曾出现了多个分支。公元前的繁花初放出现在希腊。中世纪的承续演变出现在波斯、阿拉伯。文艺复兴时期的复苏猛绽出现在意大利。在希腊罗马文化向北传播的同时，阿拉伯文化在北非大片土地深深扎根。被尊为“近现代和声之父”的Zarlino，就诞生于环地中海文化圈，这是当代欧洲的任何一个音乐家都不应该忘记的；而Zarlino之所以能树起这块历史丰碑，就由于他懂得从律学数理来审视音律的和谐，这又是世世代代的各国音乐家都该知道的。在欧洲近代音乐文化的人才辈出和名作连珠，我们能摸到Zarlino所昭示的和谐数理经历逻辑推演的脉搏。而20世纪欧洲音乐的持续危机，正是由于在文化领地的大面积范围丢失了这一文化信息。

往往被忽略的历史事实是，在沿着Zarlino设定的“六数列”轨道不断延伸的几百年间，音乐实践逐渐对“六数列”有所超越，涉及了质因数7、17、19。同样被忽略的是，其他文化圈的音乐实践有另一些数理开拓，有的涉及质因数3的高次幂，有的涉及质因数11、13。正是这些数理开拓使这些音乐文化呈现出迥然不同于大小调的特色。

律学学科在近代衰微，有文化生态和教育生态的外因境遇，也有自身概念结构疾患的内因根由。这两者，在几十年的学术思虑中一直煎熬着我。这煎熬也从我传到学生，李玫从硕士论文到博士论文的节节提升，或许也该归功于这煎熬。有转机吗？当我们能够——如这部书稿所启迪——从人类文明史的大视野和长历程重新考察律学学科的命运，重新感受其顽强生机之时，就不难从剧烈的危急感中解脱出来了。这个大视野的长历程，缪天瑞

先生曾在半世纪之久《律学》一书再三修订的过程中，向我们层层展示。今天，李玫利用信息时代的传媒，利用国际文化交流的崭新渠道，获取了许多前所未知的史料，进一步拓宽视野。这是我几十年来做不到的。这令我在通读这部书稿时由衷涌起阵阵感激之情。

诊治律学学科的概念结构疾患，看来还将费些时日。但今天我们已不必为它衰微厄运的前景如何担忧。在人类文明史上，它曾以不可抗拒的规律性多源萌生存活，还将以不可磨灭的勃勃生机发育壮大，而且还将以自己抽枝放苞的强劲生命力注入未来的人类音乐文化，煞住百年颓势。

哪个文化群体率先听到这一历史呼唤而自觉肩负这项历史重任，哪个文化群体就将有能力在21世纪引领人类音乐文化走出那“法老称霸的疆土”。

序 论

一、学科定义

什么是律学？用数理方法来探讨音程关系以及音高、音准的规定性，这就是有关音律的学问。

提起律学，人们的第一反应会说，太抽象了，太难了。可实际上，只要我们进行音乐活动，我们就已经在跟音律相互关系的规律打交道了。比如，制造乐器，就要调整乐器的音高；演奏乐器，首先要校音；而要合唱，就要有一个共同的音高标准；不同乐器的合奏，更需要多考虑各个乐器与整个乐队的和谐关系；我们唱出的若干乐音，互相之间总是有着一定的波长比关系，关系越简单，声音就越协和，反之，就不协和。律学研究能够解释音程之间和谐的本质，音乐进行中不协和到协和或反之，张力的消长是怎样的。这内在的比例关系，我们平时虽然感觉到，却并不理解，但一旦想要知道究竟，关于音律的思考就成为一门学问。我们的一举一动，都受物体运动规则的约束，如果没有地心引力的作用，我们可能就要飞出地球；如果没有足够的摩擦阻力，我们可能就会走路如滑行。我们并没有在意那些引力的数据或摩擦力的数据，可一旦我们想知道为什么我们不会飘到星外去，就必须了解物理学的基本道理。同样，律学就是研究音律制度构成与应用的科学。当我们需要了解音程之间的相互关系，以便使音乐表演更完善、音乐创作有更深层理论的支持，就必须了解律学的基本道理。

在很长一段时间里，多数人认为：我不懂律学照样可以拉琴、唱歌、作曲或评论音乐。如果有人问，音程关系的自然本性是什么？我也可以回答：能听辨不同的音程，说明我已经把握了音程的本性。当然，在自然状态下，音程关系的自然本性是可以凭听觉感性直接去把握的，所以在实践领域中没有理性认识，不懂律学也不妨碍你音乐艺术活动的正常进行。但在音乐学这一理论领域中，律学却是不可或缺的重要基础。

认为不懂律学不妨碍音乐行为，这样的想法只会使自己的音乐行为始终停留在一个自在阶段，而难以上升到自为境界。音乐学研究若缺乏律学知识与律学方法的支持，就难免入误区而不自知。如果你认为律学是门过了时的学问，那也大错特错了。律学是为许多音乐学学科服务的科学工具。基础乐理需要它，关于音程、和弦、调式的讲解需要它；旋律学研究需要它；和声学研究需要它；世界民族音乐研究也需要它。总之，它是整个音乐学学科的基础，有了正确、扎实的律学功底，你的学术能力会得到大大扩展。

律学的研究需要数学方法，而学习音乐者又多数对于数学比较陌生，所以感觉很难。

在律学的表述和探讨中，现有的方法也不够理想，还有待改进。所以说，方法的缺点也使初学者很难入门。要解决这个问题，需要从两方面着手：首先，在当今社会科学、自然科学大交融的时代，研究音乐学的人也需要掌握基本的数学方法，另一方面，律学研究者要改进固有的方法，以达到深入浅出的境界。笔者将尽量在下边的文字中用较轻松的笔调，帮您进入律学走廊，了解这门学科的发生、发展及一些有趣味的知识。

二、研究对象、范围

说起律学研究的对象，其实就是音乐所用音律之间的音程关系。音乐中所有有关音高的方面都涉及音程关系，对音程关系进行研究就涉及律学。反过来，就是说律学必须对音乐所用的音律从音程关系的视角进行研究。

音乐所用的音绝大多数是有确定高度的，以某些特定音程为依据，用数学方法规定一系列乐音高度的体系就是律制（tuning system)。这个体系中每个单位称为“律”，音阶是按照音程关系的一定规格从律制中选出若干律而构成的音列，其中每个单位称为“音”，“音”与“律”合称“音律”时，除指律制外，还指在高度上做精确规定的所有乐音。①

我们学习音乐、研究音乐的人总是免不了和音程打交道。一开始，基础乐理讲音程；研究地方民间音乐风格时，也要讲音程；从审美角度分析一个音乐作品时，甚至会细致到因为一个什么样的音程引起我们怎样的审美联想等等。作曲技术理论的和声、对位、配器、织体等等，也都是在讲音程组织的规则……当我们讨论旋律音程的结构与音准；调式与和声理论中的和谐原理；多声部纵向结合时的各种音程关系；转调理论；乐器制造以及调律中音准与音位的确定；重唱、重奏及合唱合奏中的音准调节……所有这些音乐过程都涉及到音程的研究。

但由于乐理知识通俗讲法中的缺陷，由于工业文明的产物——十二平均律被认做世界通行的金科玉律，对于它本质上反自然规范的特点不了解，由此引起的误会，已经误导了一批批学生和学者的思维。事实上，音乐艺术所使用的音程关系的自然数理依据是基于简单的整数比关系，人为的十二平均律制则以开方所获得的无理数为依据；自从十二平均律通行以来，其价值在于能够灵活地模拟和仿制各种自然音程，但从未取代自然音程在人类审美听觉中的意义。就各种音程的自然数理依据而言，它们的结构并不是封闭僵死的，而是随着人类艺术实践的历史进步而不断开拓的，生律法品种逐步增多，生律法推衍的幅度逐渐延伸，音乐实践所用的音系不断成长成熟，其中的规律性正有待于律学这门学科用数理方法加以揭示。十二平均律在音乐实践中的存在，并不勾销这些研究任务，而只是提供了一个简便的参照系。

---

① 参见赵宋光、韩宝强撰写的《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》律学条目，第407页。

目　录

序　言 …………………………………………………… 赵宋光（1）

序　论 …………………………………………………………（3）

一、学科定义 …………………………………………………（3）

二、研究对象、范围 …………………………………………（4）

上编　研究方法

第一章　理论律学的方法 ……………………………………（3）

第一节　理论律学的基本概念 ………………………………（3）

一、音程系数（Intervallic coefficient） ……………………（3）

二、音程值（Intervallic value） ……………………………（6）

三、相对波长（Relative wavelength）与相对音高（Relative pitch height） ………（12）

四、跃迁算子（Transition operator）与跃程值（Transitional intervallic value） ……（14）

第二节　与音律相关的长度认识所经历的正反合历程 ………（15）

一、长度比值（Length rate）古代各种文化用长度表述音律 ………（16）

二、频率比值（Frequency rate）近现代律学研究方法的变化 ………（17）

三、周期比值（Cyc. of vibration rate）现代物理学为律学思维带来质的飞跃 ……（17）

第三节　真数与对数两个领域里的沟通对应 …………………（19）

一、用不同文化圈所用的音程值单位来表述从相对波长到相对音高的推算过程 ……（20）

二、运算实例分析 ……………………………………………（21）

第二章　生律法的自然依据 …………………………………（22）

第一节　谐音列（Harmonic tone series）所含的自然音程 ………（22）

一、谐音列的意义 ……………………………………………（22）

二、谐音号数与各音的比例当数一致 ………………………（23）

三、真数换算成对数的基本数据表 …………………………（23）

第二节　各种律制概述 ………………………………………（25）

一、五度相生律（System of tuning in perfect fifths 或 Pythagorean intonation） ……（25）

二、纯律（Just intonation）——三、六度生律法 ……………（28）

三、平均律（Equal temperament） …………………………（32）

四、其他各种生律法 …………………………………………（34）

下　编　律学研究历史的发展与回顾

第一章　中国最早的律学实践与记载 …………………………………………（41）
第一节　《管子·地员篇》——三分损益法的最早记录 ………………………（41）
第二节　曾侯乙编钟铭文 ……………………………………………………（42）
一、编钟铭文记录了早期弦律的应用实践 ……………………………………（43）
二、铭文内容的律学表达 ……………………………………………………（44）
第三节　《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》——十二律相生而出的最早记录 ………（49）

第二章　中国律学理论的纵深发展 ……………………………………………（52）
第一节　《淮南子》律数——自然数的开拓 …………………………………（52）
一、初立黄钟大数 ……………………………………………………………（52）
二、寻找等差数列 ……………………………………………………………（53）
三、淮南律数内涵的乐律学能量 ……………………………………………（54）
四、淮南律数的历史意义与思想价值 ………………………………………（57）
第二节　《史记·生钟分》——智慧的表述体系 ……………………………（57）
第三节　京房六十律的理论价值及其他 ………………………………………（59）
一、京房六十律的内容与方法 ………………………………………………（60）
二、京房的数据及严密的逻辑 ………………………………………………（63）
三、钱乐之三百六十律 ………………………………………………………（67）
第四节　应用律学的杰出成果——荀勖笛律 …………………………………（68）
一、荀勖管口校正数的计算方法 ……………………………………………（70）
二、荀勖十二笛及开孔数据 …………………………………………………（70）
三、荀勖笛律留下的难题 ……………………………………………………（73）
第五节　何承天新律及其他 ……………………………………………………（76）
一、何承天化繁为简的新律 …………………………………………………（76）
二、刘焯律 ……………………………………………………………………（79）
第六节　王朴新律及其他 ………………………………………………………（80）
一、对三分损益法巧妙变革的王朴新律 ……………………………………（80）
二、蔡元定十八律 ……………………………………………………………（82）
第七节　琴律学 …………………………………………………………………（84）
一、琴上十三徽的律学内涵 …………………………………………………（84）
二、文献中记载的定弦法 ……………………………………………………（88）
三、暗徽的设置 ………………………………………………………………（100）
四、具有多维生律因素的琴律 ………………………………………………（102）

第八节　中国对十二平均律的研究 ……………………………………………… (116)
一、朱载堉——最早创立十二平均律 ………………………………………… (116)
二、朱载堉的计算方法 …………………………………………………………… (117)

第三章　印度人奇妙的律学理论 ……………………………………………… (120)
第一节　古老的"22 斯鲁蒂"理论 ……………………………………………… (120)
一、记录在印度古籍《乐舞论》中的两种音阶 ………………………………… (121)
二、记录在印度古籍《乐海》中的"格音阶" ………………………………… (123)
三、三种音阶的主要差异 ………………………………………………………… (125)
第二节　16 世纪以后律学研究的学理化发展 …………………………………… (128)
一、拉玛马特亚最早用实践的方法逼近数理表达 ……………………………… (128)
二、阿霍帕拉·彭迪达的掐段率 ………………………………………………… (129)
三、帕特肯代所创立的拉格分类法之得与失 …………………………………… (133)

第四章　阿拉伯—波斯人的律学成就 ………………………………………… (135)
第一节　量音理论（Theory of measuration） ………………………………… (135)
一、三分三倍相生最初的九律 …………………………………………………… (136)
二、法拉比《音乐全书》中记录的乌德琴定弦法 ……………………………… (136)
三、中指品位的改造 ……………………………………………………………… (138)
四、特殊音程的历史价值 ………………………………………………………… (139)
第二节　乌德品位记录下的律学成就 …………………………………………… (141)
一、阿尔·法拉比的 10 个乌德品位 …………………………………………… (141)
二、四弦十品乌德琴音位图 ……………………………………………………… (142)
三、含中立音的四音列与调式 …………………………………………………… (143)
第三节　萨菲丁的不平均十七律及 12 种调式 ………………………………… (145)
一、萨菲丁的不平均十七律 ……………………………………………………… (146)
二、萨菲丁乌德音位图展示出的四音列构成 …………………………………… (146)
三、12 种调式 …………………………………………………………………… (149)
四、对阿拉伯民族调式及音律特征的最终理想化保护 ………………………… (154)
五、17 种"金斯"的音律结构 ………………………………………………… (155)

第五章　欧洲乐律学发展历程 ………………………………………………… (159)
第一节　古希腊的"数理派"、"和谐派"及四音列 …………………………… (159)
一、自然四音列（Diatonic tetrachord） ……………………………………… (160)
二、变化四音列（色彩性 Chromatic tetrachord） …………………………… (167)
三、四分音四音列（Enharmonic tetrachord） ………………………………… (167)

四、阿希达斯方案 …………………………………………………………………………… (168)
第二节　欧洲人的纯律探索及中庸全音调律法 ……………………………………… (169)
一、拉莫斯的纯律理论 ……………………………………………………………………… (170)
二、扎里诺的纯律理论 ……………………………………………………………………… (173)
三、纯律在音乐实践中的问题 ……………………………………………………………… (179)
四、中庸全音律（Mean-tone temperament）的探索 …………………………………… (181)
五、巴赫的调节律——Well temperament ……………………………………………… (184)
第三节　十二平均律的探索 ………………………………………………………………… (185)
一、思想方法的变迁 ………………………………………………………………………… (186)
二、西蒙·斯台文对十二平均律的研究 …………………………………………………… (188)
三、梅尔桑的十二平均律 …………………………………………………………………… (190)
第六章　在物理学、数学新概念激励下的律学研究 ……………………………………… (193)
第一节　对数的发现和小微音差的表达 …………………………………………………… (193)
一、对数的发明并被用于音乐领域 ………………………………………………………… (193)
二、小微音差的发现 ………………………………………………………………………… (194)
第二节　谐音列与共泛音结合 ……………………………………………………………… (194)
一、迷人的沉音列概念 ……………………………………………………………………… (195)
二、小三和弦的共泛音结合样式 …………………………………………………………… (196)
三、沉音列是否存在 ………………………………………………………………………… (197)
四、和声二元论的发展历程 ………………………………………………………………… (198)
第三节　各种多律位的平均律 ……………………………………………………………… (200)
一、不同的五十三平均律或趋匀律 ………………………………………………………… (200)
二、二十四平均律或趋匀律 ………………………………………………………………… (201)
第七章　中国近现代乐律学研究状况 ……………………………………………………… (202)
第一节　20世纪上半叶的律学研究 ………………………………………………………… (202)
一、在律学研究中引进欧洲的声学、数学方法 …………………………………………… (202)
二、对东西方律制进行比较研究 …………………………………………………………… (203)
第二节　20世纪下半叶的乐律学研究 ……………………………………………………… (204)
一、琴律研究 ………………………………………………………………………………… (204)
二、对曾侯乙编钟铭文的律学内涵之研究 ………………………………………………… (205)
三、琴律研究方法体系化 …………………………………………………………………… (205)
四、有关笛律的研究 ………………………………………………………………………… (209)
五、有关中立音的研究 ……………………………………………………………………… (210)
最后的话：学科发展的未来走向 …………………………………………………………… (215)

附 录

附录一 对钱乐之三百六十律的清理及补正 ……………………………………………………（217）
附录二 术语及叙辞表（Glossary）……………………………………………………………（243）
附录三 音分/频率对照表……………………………………………………………………（254）
附录四 参考资料（Bibliographys）…………………………………………………………（259）
附录五 保护无形文化遗产还需建立文化结构形态的系统化研究 ………………………（265）

后 记 ……………………………………………………………………………………………（270）

上　编

研究方法

第一章 理论律学的方法

律学属于声学（Acoustics）、数学（Mathematics）和音乐学（Musicology）的交缘学科。音乐所用的音绝大多数是有确定高度（fixable pitch）的，这些声音的物理属性和律制的数理规定性，都决定了对它们的研究必须通过物理学和数学的方法。在这基础上，律学研究还必须结合世界各民族音乐中实际运用的音阶、调式，研究各种律制在应用中的实际情况。

第一节 理论律学的基本概念

一、音程系数（Intervallic coefficient）

1. 音程系数的定义

系数是指测量某种性质或特征的数以及一般在计算中使用的因子，音程系数当然就是指能表达音程性质的数。理论律学的一个重要任务就是要计量各种音程的大小。

一定的音程对应于两个长度之间的一定的比值。例如，纯八度对应于比值2（两长度之比为2∶1），纯五度对应于比值$\frac{3}{2}$（两长度之比为3∶2）。比值可以写成分数，当比值写成假分数时，称之为“音程系数”（intervallic coefficient）①；写成真分数，则称为“音程系数的倒数”。音程系数是指任何音程关系的两音之振动周期比的比值。它的大小能显示音程距离的大小。例如：

纯八度＞纯五度＞纯四度

$$2 > \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$$

由于振动周期可以确定不移地体现音高物理本质，采用振动周期（即时间中的绝对波长）作为表达数据，音程系数的关系式就可以表达为：

$$\text{某两音之间音程关系的音程系数} = \frac{\text{较低音律的振动周期}}{\text{较高音律的振动周期}}$$

以当代标准音 a^1 为例，振动周期为$\frac{1}{440}$秒，比它高纯五度的音（略高于 e^2），振动周期是$\frac{1}{660}$秒。这是无条件的。

---

① 赵宋光：《理论律学的基本方法》，原载《音乐艺术》1984年第3期，现收入《赵宋光文集》第二卷，广州花城出版社2001年第1版，第300－314：302页。

a^1 与上方纯五度音之间音程关系的音程系数 $= \dfrac{\frac{1}{440}\text{秒}}{\frac{1}{660}\text{秒}} = \dfrac{3}{2}$

如果采用的数据为振动频率，关系式为：

某两音之间音程关系的音程系数 $= \dfrac{\text{较大的振动频率数值}}{\text{较小的振动频率数值}}$

仍以当代标准音 a^1 为例，每秒振动次数为 440 次，比它高纯五度的音，每秒振动次数为 660 次，这是无条件的。

a^1 与上方纯五度音之间音程关系的音程系数 $= \frac{660}{440} = \frac{3}{2}$

这就是人们通常所说的“频率比”，但需要强调的是，这个分数数值，不仅仅表示两个振动频率数的“比”（ratio），而且给定了“比值”（rate）。所以应该称为“频率比值”。从现象上看，“频率比值”的形式与“音程系数”的形式是一样的，读者会有疑问：为什么不用已有的术语，而一定要用一个新的语词“音程系数”呢？因为“频率比值”只说出了计算途径，没说出计算的目的和数值的功用。我们计算的目的是求得一个对应于特定音程、能够标志这个音程相对大小的数值，这数值还能揭示每个音程的特定本质。所以说，只有“音程系数”可以表达这个概念。

真分数和假分数两种比值形式都有资格表示某个音程的物理意义，但要显示音程的大小时，真分数就不如假分数方便。因为，两音音波长度差异越大，音程也就越大，而真分数则正好相反，分子、分母差数越大，这分数的数值就越小，比如，纯八度这个音程用真分数数值来表示是 $\frac{1}{2} = 0.5$，而纯五度这个音程用真分数数值来表示是 $\frac{2}{3} = 0.6666$，这与音程越大的事实是相反的；假分数分子、分母差越大，这分数数值越大，与音程越大的事实是顺对应的。所以，对“音程系数”的规定是：让较大的当前项，比值 >1，而比值 <1 的则称为“音程系数的倒数”。所以音程系数可以理解为“用假分数形式表述的周期比值”。

2. *音程系数与谐音列的对应关系*

问：我想写出常见音程的音程系数，有简便的方法吗？

答：有，利用谐音号数。

在基本乐理里我们都学过“泛音列”。现在把这称呼给予科学化、规范化。我们把基音和各泛音合在一起，统称“谐音”，基音与各泛音形成的音列就称为“谐音列”。再给这音列的各音统一编号：基音编为 1 号，第一泛音编为 2 号，第二泛音编为 3 号，……。这些号数就能用来写出音程系数。

某两谐音相距音程的音程系数 $= \dfrac{\text{较大谐音号数}}{\text{较小谐音号数}}$

例如：

1 号谐音与 2 号谐音相距纯八度，

纯八度的音程系数 $= \frac{2}{1} = 2$

2 号谐音与 3 号谐音相距纯五度，

纯五度的音程系数 = $\frac{3}{2}$

3 号谐音与 4 号谐音相距纯四度，

纯四度的音程系数 = $\frac{4}{3}$

依此类推，不难写出其余 4 个常见音程的音程系数。列表如下：

表 1

音程名称	音程系数	音程名称	音程系数
纯八度	2		
纯五度	$\frac{3}{2}$	纯四度	$\frac{4}{3}$
纯律大三度	$\frac{5}{4}$	纯律小六度	$\frac{8}{5}$
纯律小三度	$\frac{6}{5}$	纯律大六度	$\frac{5}{3}$

观察这些数据，我们不难发现音程系数互相推算的方法。

> 当音程相加时，音程系数要相乘。
> 当音程相减时，音程系数要相除
> （被减者的系数当被除数）。

例如：

$$\begin{cases} \text{纯五度} + \text{纯四度} = \text{纯八度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{纯五度} - \text{纯律大三度} = \text{纯律小三度} \\ \frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

由此不难发现音程转位时系数演变的规律。请观察：

$$\begin{cases} \text{纯八度} - \text{纯律大三度} = \text{纯律小六度} \\ 2 \div \frac{5}{4} = \frac{8}{5} \end{cases}$$

可发现的规律是：

> 音程转位时——
> 系数颠倒乘 2。

用这些方法，我们就能由已知的音程系数推算出未知的音程系数。

$$\begin{cases} \text{纯五度} - \text{纯四度} = \text{大全音} \\ \frac{3}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{9}{8} \end{cases}$$

大全音转位，是较小的小七度

$\frac{9}{8}$颠倒乘 2：$\frac{8}{9} \times 2 = \frac{16}{9}$

这样的小七度，也就是两个纯四度相加所得的。

$$\begin{cases}\text{纯四度}+\text{纯四度}=\text{较小的小七度}\\ \frac{4}{3}\quad\times\quad\frac{4}{3}\quad=\quad\frac{16}{9}\end{cases}$$

与此对比：

$$\begin{cases}\text{纯四度}-\text{纯律小三度}=\text{小全音}\\ \frac{4}{3}\quad\div\quad\frac{6}{5}\quad=\quad\frac{10}{9}\end{cases}$$

小全音转位，是较大的小七度

$\frac{10}{9}$颠倒乘2：$\frac{9}{10}\times2=\frac{9}{5}$

这样的小七度，也就是纯五度加纯律小三度所得的。

$$\begin{cases}\text{纯五度}+\text{纯律小三度}=\text{较大的小七度}\\ \frac{3}{2}\quad\times\quad\frac{6}{5}\quad=\quad\frac{9}{5}\end{cases}$$

进而追问，大全音和小全音的差额是什么呢？

$$\begin{cases}\text{大全音}-\text{小全音}=\text{普通音差}\\ \frac{9}{8}\quad\div\quad\frac{10}{9}\quad=\quad\frac{81}{80}\end{cases}$$

问：我想知道半音的音程系数，也能算出吗？

答：由以上数据，能算出三种不同的半音：自然半音、同功能变化半音、反功能变化半音。

$$\begin{cases}\text{纯四度}-\text{纯律大三度}=\text{自然半音}\\ \frac{4}{3}\quad\div\quad\frac{5}{4}\quad=\quad\frac{16}{15}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{纯律大三度}-\text{纯律小三度}=\text{同功能变化半音}\\ \frac{5}{4}\quad\div\quad\frac{6}{5}\quad=\quad\frac{25}{24}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{大全音}-\text{自然半音}=\text{反功能变化半音}\\ \frac{9}{8}\quad\div\quad\frac{16}{15}\quad=\quad\frac{135}{128}\end{cases}$$

有了音程系数这个概念，对于不同民族所使用的特殊调式结构就可以有一个非常逻辑化的本质剖析，不会只停留在现象描述上。

二、音程值（Intervallic value）

1. 音程值的定义

在关于音程的知识中，存在着现象和本质这一对矛盾。涉及音程本质的真数（real number）是音程系数，就是说，当说到纯八度这个音程时，它的音程系数是2，所揭示的物理本质是有效长度为2∶1这样的比例关系。但仅仅知道这个本质，却仍然不方便表述对音程现象的心理感觉。所以，要切实准确地懂得音程，就必须同时拥有把握音程的本质和现象的能力。而描述音程现象的层面属于对数领域，就是音程值。

在比较两个近似音程的大小时，必须通过乘除计算，而两个音程相加减，也必须做乘

除运算；音程被扩大到多少倍或被划分为多少等分，则要乘方或开方运算。随着数学的发展，19 世纪开始将对数概念用于音程计量，建立了“音程值”概念。音程值是音程系数的对数，它能够描述音程现象，就是通常说的音分数和全音数。音程值之间可以用加减法互相推算，把人类感觉器官对于客观量的主观感受明白直接地表述出来，把复杂的计算化简。只有建立了真数→对数这一对概念，才能准确掌握任何音程的本质，并能轻松描绘音程的现象。只知真数（在古中国以“三分损益”出现）不知对数的古老方法是不完善、不清晰的；只知对数不谈真数的偷懒方法则是不科学的。比如当代人通过键盘乐器，依据键盘观念获得的乐理知识，虽然直观地看到了音程关系的现象，但并不准确，而且丢失了本质认识。

2. 对数是感觉器官对量与量相互关系的客观量表达

对数在基础乐理中是习以为常的，比如，当你说纯四度是 $2\frac{1}{2}$ 全音，纯五度是 $3\frac{1}{2}$ 全音，用的数值就是对数。当人耳这个接收器接收到一个声波后，经过外耳、中耳、内耳一系列听觉器官各部位的传递机制，波动的共振转化为神经脉冲；中枢神经对来自两个音波的神经脉冲进行比较时，波长比例所导致的比值真数按某种关系被以幂指数放大，只能用对数关系来表达。对数数值的性质符合人类感觉器官的本性，关于这一点，早在 1860 年，德国心理学家费希纳（Gustav Theodor Fechner，1801 ~ 1887 年）就出版了他不朽的著作《心理物理学原理》，在这本书中，他用一个简单的数学法则概括了主观感觉和刺激源之间的联系：当刺激量以乘法增加时，感觉量以加法增加，例如当声音强度倍增时，它的响度增加一个刻度单位，数学家称此为对数关系。费希纳法则将这二者的关系表述为感觉量以刺激量的对数增加。他经过许多实验与推导，得出感觉与刺激的对数公式：$S = K\log R$

式中 S 为感觉量差值，R 为刺激量比值，K 为常数。①

In order that the intensity of a sensation may increase in arithmetical progression, the stimulus must increase in geometrical progression.

各种感觉器官对于客观量加以比较时，总是会把相等的比例关系感觉为是相同的差数，这就是对数尺度的本质，一旦把客观量相互量度所得到的真数转换成它的对数，就可以把主观感受的相互关系明白直接地表述出来了，因而也会把复杂的计算化简了。原来需要乘除，现在就可以直接相加减，结果与我们对听觉感受的思考是直接吻合的。

什么是对数？这要从十底幂讲起。先来回忆一下我们已有的知识：

$10^3 = 1000$

$10^2 = 100$

$10^1 = 10$

$10^0 = 1$

$10^{-1} = 0.1$

$10^{-2} = 0.01$

① THOMAS D. ROSSING：*The Science of Sound*，第 70 页。

这里，用小号字写在幂右上角的，是指数。指数跟对数有什么关系？只要把指数摘下来，写成普通字号的数字，就成对数了。

例如：

$10^2 = 100$　　读做：十底2次幂等于百。

$\text{Log}_{10}100 = 2$　　读做：在以十为底的条件下，百的对数等于2。

$10^1 = 10$　　读做：十底1次幂等于十。

$\log_{10}10 = 1$　　读做：在以十为底的条件下，十的对数等于1。

$10^0 = 1$　　读做：十底零次幂等于1。

$\log_{10}1 = 0$　　读做：在以十为底的条件下，1的对数等于零。

在上述三组关系式里，每组的第二行里，等号前有符号“log”，它的意义是“求对数”；它的右下角有用小号字写出的数字，这数字表明“在什么条件下”，此处全都是小号数字“10”，全都表明“在以10为底的条件下”；之后，在等号之左紧挨着等号的数，称为“真数”（来自上行等式的等号后，那就是“幂的值”），最后，在等号之右的数，称为“对数”，那就是上行等式里等号前幂右上角的指数摘下来转化成的。

观察对数跟真数的对应关系，不难发现：

在对数轨道上：　$1 + 1 = 2$
在真数轨道上：$10 \times 10 = 100$

在对数轨道上：　$1 - 1 = 0$
在真数轨道上：$10 \div 10 = 1$

概括地说：

> 当真数相乘时，相应对数要相加。
> 当真数相除时，相应对数要相减，
> 被除数的对数当被减数。

问：既然我们知道纯八度的音程系数是2，能不能把2认作真数，来求对数呢？

答：求对数要讲条件。刚才我们都“在以十为底的条件下”求对数，现在我们仍在同一条件下求对数，在这条件下求得的对数称为“常用对数”。

问：2的常用对数是什么数值呢？

答：你我都不具备算出这一数值的数学技巧。近代的数学家们已经制成“常用对数表”，你我只须查表，就能查到每个数的常用对数。查到2的常用对数是0.30103。这是不难理解的，请看对应关系：

表 2

真数	常用对数
10	1
2	0. 30103
1	0

以查表所得的数值为依据，我们能写出关系式：

$\log_{10}2 = 0.30103$

按照数学界的约定和习惯，简写成：

$\lg 2 = 0.30103$

虽然查到了对数数值，但我们对这数值颇感不满：太小了，难道叫我们把一个纯八度的音程值说成 0. 30103 个什么样的单位？太小，那就放大吧！但放大时必须遵守“按比例放大”的规则，这就是说，对应于每个音程系数在常用对数表上查到的对数数值必须乘以同一个数（它被称为“比例常数”）来放大，否则，所得的数值就没有科学价值可言了。

放大到多少倍呢？所选择的“比例常数”是什么数值呢？在近代历史上，曾出现四种不同的方案，下文稍后将回顾这段历史。暂时，我们把注意力集中在跟基础乐理观念关系最直接最密切的方案。在基础乐理领域里，早已习惯说“全音”、“半音”，借用十二平均律为参照系，一个纯八度可分成 12 个“半音”，或者说，等于 6 个全音。为了适应这习惯，我们就把那个太小的 0. 30103 放大成 6。不难写出关系式：

$\lg 2 \times \frac{6}{\lg 2} = 6$

由此推广到代数公式，可写出：

$\underbrace{\lg（任何音程系数）}_{可以查表得到} \times \frac{6}{\lg 2} = 相应的全音数$

即 $\frac{6}{0.30103} \times \lg（任何音程系数） = 相应的全音数$

即：

$$与某音程系数相对应的全音数 = 19.9315686 \times \underbrace{\lg（任何音程系数）}_{可查表得到}$$

例如，若问纯五度的音程值是多少全音，我们就用纯五度的音程系数 $\frac{3}{2}$（=1.5）代入公式：

与 1. 5 相对应的全音数

$= \lg 1.5 \times 19.9315686$

$= 0.176091259 \times 19.9315686$

$= 3.5097750097 \approx 3.51$

从音程系数推算音程值，即从真数推算对数，可说是律学研究中最高深繁难的计算了。但在电子计算器已普及到百姓家的当代，这样的计算也不可怕了。不仅如此，需用这种推

算的场合实际上并不多，我们只要推算出基本的音程值数据（例如纯五度与纯律大三度两个音程值全音数），传统律学用得着的其余各项音程值数据都可由它们和纯八度全音数（=6）相减或相加算出。超越传统律学范围而进入新领域时，每个新领域只需增添一个基本音程值数据，就又能顺利推算了。

有了音程值数据，我们就能用数值来确切地表示音高与音高的距离，正好比我们能用公里数来表示城市与城市的距离。

3. 曾经有过的不同音程值单位

下文回顾历史，介绍四种音程值单位的由来。①

（1）瑞士人欧拉（Léonhard Euler，1707～1783年）创用，德国人里曼（Hugo Riemann，1849～1919年）等人所沿用的方案，把2的常用对数放大到1000，所有各音程系数的常用对数都按此比例放大。

比列式可以写做：$\frac{\text{与某音程系数相对应的密优数}}{\lg\text{（某音程系数）}}=\frac{1000}{\lg 2}$

这样的音程值单位就称为“μ”（这希腊字母读做“密优”）。换句话说，一个“密优”的大小就是纯八度的千分之一。

$$\text{与某音程系数相对应的密优数}=\frac{1000}{0.30103}\times\lg\text{（某音程系数）}$$

（2）由法国人萨瓦尔（Félix Savart，1791～1841年）创用的方案，把音程系数的常用对数扩大到1000倍（把小数点右移三位），用做音程值的数值。

比例式可以写做：$\frac{\text{与某音程系数相对应的萨瓦尔数}}{\lg\text{（某音程系数）}}=1000$

这样的音程值单位就称为“萨瓦尔”。换句话说，一个“萨瓦尔”的大小就是谐音列中从基音到第10号谐音这个宽音程（三个八度加纯律大三度）的千分之一。

$$\text{与某音程系数相对应的萨瓦尔数}=1000\times\lg\text{（某音程系数）}$$

（3）英国人埃利斯（Alexander Ellis，1814～1890年）创用的方案，把2的常用对数放大到1200，所有各音程系数的常用对数都按此比例放大。

比例式可以写做：$\frac{\text{与某音程系数相对应的音分数}}{\lg\text{（某音程系数）}}=\frac{1200}{\lg 2}$

这样的音程值单位就称为“cent”，汉译做“音分”。换句话说，一个“音分”的大小就是纯八度的$\frac{1}{1200}$，即平均律半音的$\frac{1}{100}$，

$$\text{与某音程系数相对应的音分数}=\frac{1200}{0.30103}\times\lg\text{（某音程系数）}$$

① 赵宋光：《一笔恼人遗产的松快清理》第365页。

（4）日本人田边尚雄（1883～1984年）创用的方案，把2的常用对数放大到6，所有各音程系数的常用对数都按此比例放大。

比例式可以写做：$\frac{\text{与某音程系数相对应的全音数}}{\lg\text{（某音程系数）}}=\frac{6}{\lg 2}$

这样的音程值单位就称为"平均律全音"，简称"全音"。如所周知，一个"全音"的大小就是纯八度的$\frac{1}{6}$（换算公式见后文第20页）。

只有在这个方案中，表示音程值的数才于基础乐理中的半音、全音、三全音等概念所用的数相吻合。可见这是最优的方案，使用全音数以表示音程值的计量制是最简明、最便利的。

其余三种计量制的数值折合成全音数时所用的换算公式如下。

我们用"全音数"单位将上述四种单位加以比较：

$$1\text{ 萨瓦尔}=\frac{600}{30103}\text{全音}=0.0199315683\text{ 全音}$$
$$1\text{ 密优}=\frac{6}{1000}\text{全音}=0.006\text{ 全音}$$
$$1\text{ 音分}=\frac{6}{1200}\text{全音}=0.005\text{ 全音}$$

可能有许多学者更熟悉音分数，[①] 若要把全音数折合成音分数，可用如下公式：

$1\text{ 全音}=\frac{1200}{6}\text{音分}=200\text{ 音分}$

只须取全音数×200，就得到音分数了。

尽管"萨瓦尔"和"密优"不是常用的计量单位，但为了阅读西方律学文献可能遇到的拦路虎，这里也列出折算公式：

$1\text{ 全音}=\frac{1000}{6}\text{密优}=166.6666667\text{ 密优}$

$1\text{ 全音}=\frac{1000\lg 2}{6}\text{萨瓦尔}=\frac{301.03}{6}=50.17166667\text{ 萨瓦尔}$

把上文加以总结，我们能建立这样的概念：每一个音程系数（作为真数）都有某个音程值全音数（作为对数）跟它对应；真数与对数双轨并行，可进行双轨推算；在真数轨道上做乘除推算时，在对数轨道上做加减推算。

表3　基本数据：

音程值全音数	3.51	1.93
音程名称	纯五度	纯律大三度
音程系数	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{4}$

推算举例：现在要求把纯律大三度、五度相生大三度、和声小调内的减四度这三个音程进行比较。

① 在目前通常的表述中所常用的"音分值"是个缺少推敲的概念，埃利斯所设计的计量体系是将一个半音计数为100音分。"值"表达的是事物本质的确定涵义，对应英文的"value"；在这里，音程值有不同的计数单位，每种单位对同一个音程的"value"有不同的数量描述。所以，准确地说是"音分数"，意为"cent count"。

纯律大三度的音程系数与音程值全音数，见上列基本数据表3。

五度相生大三度的推算方法是4个纯五度减去2个纯八度。

$$\begin{cases} 3.51 + 3.51 + 3.51 + 3.51 - 6 - 6 = 2.04 \\ \text{纯五度}+\text{纯五度}+\text{纯五度}+\text{纯五度}-\text{纯八度}-\text{纯八度}=\text{五度相生大三度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \div 2 \div 2 = \frac{81}{64} \end{cases}$$

和声小调内的减四度由纯律小三度加自然半音而得。由此追问：纯律小三度的推算途径如何？自然半音的推算途径如何？

$$\begin{cases} 3.51 - 1.93 = 1.58 \\ \text{纯五度}-\text{纯律大三度}=\text{纯律小三度} \\ \frac{3}{2} \div \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (6 - 3.51) - 1.93 = 0.56 \\ \text{纯八度}-\text{纯五度}-\text{纯律大三度}=\text{自然半音} \\ (2 \div \frac{3}{2}) \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1.58 + 0.56 = 2.14 \\ \text{纯律小三度}+\text{自然半音}=\text{和声小调内的减四度} \\ \frac{6}{5} \times \frac{16}{15} = \frac{32}{25} \end{cases}$$

三者相比较，可列成如下表格：

表4

音程值全音数	1.93	2.04	2.14
音程名称	纯律大三度	五度相生大三度	和声小调内的减四度
音程系数	$\frac{5}{4}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{32}{25}$

三、相对波长（Relative wavelength）①与相对音高（Relative pitch height）

描述音高的真数⟶对数的对应概念为：相对波长⟶相对音高。相对波长的数值，既可 <1，也可 >1；与之对应，相对音高的数值，既可 >0，也可 <0。这样的描述方式可以比作：某城市的位置在坐标中心之北或之南若干里。

1. 相对波长概念的由来

声音的波长虽然看不见，但我们可以想象出，长的波对应于低的音，短的波对应于高的音。“波长”有空间和时间两个视角，从空间视角看，波长与传播速度相关。声波在空气中或

① “相对波长”这个概念最早见于赵宋光文《中华律学传统的复兴与开拓》，发表于1986年第3期《中国音乐学》，后来在另一篇长文《一笔恼人遗产的松快清理》中详细阐述这个术语，发表于《音乐研究》1993年第3期。

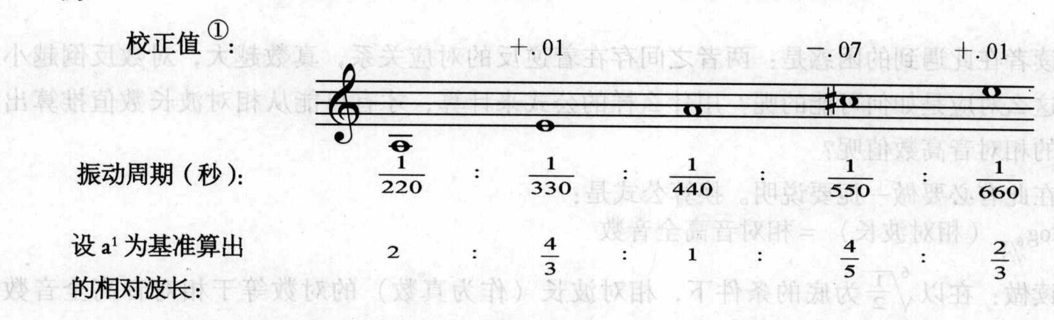
在铁轨中的传播速度是不一样的，所以，对于同一个音律而言，我们找不到确定不变的绝对波长数值。从时间视角看，一定的音高（音律）就对应于一定的绝对波长数值，也就是说：

时间中的绝对波长 = 振动周期

对于一定的音高而言，振动周期的数值是确定不变的，所以，可以把振动周期理解为“时间中的绝对波长”。有了绝对波长，相对波长就可以很容易算出来。一系列音的绝对波长同时除以作为基准那音的绝对波长，就得到各自的相对波长了。即，两个音的绝对波长之商为“相对波长”：

$$\text{某音律的相对波长} = \frac{\text{该音律在时间中的绝对波长}}{\text{作为基准的音在时间中的绝对波长}}$$

例 1



设哪个音律为基准，是自由的，取决于我们研究工作的需要。此处姑且设标准音 a^1 是基准，在这条件下，各音律的相对波长数值如何计算得到呢？各音律的振动周期全都除以基准音律的振动周期 $\frac{1}{440}$ 秒。

e^2（+.01）的相对波长 $= \dfrac{\frac{1}{660}\text{秒}}{\frac{1}{440}\text{秒}} = \dfrac{2}{3}$

$^{\#}c^2$（−.07）的相对波长 $= \dfrac{\frac{1}{550}\text{秒}}{\frac{1}{440}\text{秒}} = \dfrac{4}{5}$

a^1 的相对波长 $= \dfrac{\frac{1}{440}\text{秒}}{\frac{1}{440}\text{秒}} = 1$

e^1（+.01）的相对波长 $= \dfrac{\frac{1}{330}\text{秒}}{\frac{1}{440}\text{秒}} = \dfrac{4}{3}$

a 的相对波长 $= \dfrac{\frac{1}{220}\text{秒}}{\frac{1}{440}\text{秒}} = 2$

由上列 5 个实例可以看出，相对波长数值能让我们一目了然地看出所研究音律的波长相互关系。凡基准音律本身，相对波长必 = 1；凡高于基准的音律，相对波长必 < 1；凡低

① 校正值的由来是用十二平均律作为框架尺度，来衡量自然音程的大小所得到的微差。平均律音程通过校正就能转化为不同的自然音程。

于基准的音律，相对波长必 >1。

2. 相对音高

是相对波长的对数，即音高用正负全音数表达。将基准音的相对音高数值认做纵标尺上的0；比基准低的音，相对音高必为负值；反之，比基准高的音，相对音高为正值。正负号右边的绝对数值总是等于该音距离基准的音程值，所以前边的双轨推算结果可以直接取过来。

相对音高与相对波长之间的对应关系，有如下规律：

表5

相对音高	对数	负值 <0	0	正值 >0
相对波长	真数	假分数 >1	1	真分数 <1

读者在此遇到的困惑是：两者之间存在着逆反的对应关系，真数越大，对数反倒越小了，这么对应是如何可能的呢？用什么样的公式来计算，才有可能从相对波长数值推算出这样的相对音高数值呢？

在此有必要做一扼要说明。换算公式是：

$\log_{\sqrt[6]{\frac{1}{2}}}$（相对波长）＝相对音高全音数

读做：在以$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$为底的条件下，相对波长（作为真数）的对数等于相对音高全音数（作为对数）。这公式的具体运用，须借助“换底公式”，下文会举例说明。

这对概念可以使学习者、研究者一目了然地比较出不同律制的差异，对各民族的运律情况可以有一个从本质到现象的细微描述。

四、跃迁算子（Transition operator）与跃程值（Transitional intervallic value）

1. 基本定义

有了上述概念，我们还可以建立“跃迁算子”和“跃程值”概念。这是描述音高变化的真数⟶对数的对应概念：跃迁算子⟶跃程值，可以比做城市间交通的行程。因为当两个音先后相继时，就音波本身而言，就是从某一波长到另一波长的跳跃性迁移，这就是音波波长的跃迁，[1] 用数学方法表述，即写成一个“跃迁算子”[2]，形式为“×乘数”（这

---

① “跃迁”一词是从量子力学借用过来的术语，由赵宋光提出（1982年）。可以指振动状态由某一波长突然改变为另一波长，不经过中间状态，不插入过渡阶段。跃迁反映在旋律形态上就是旋律音程，或为上行或为下行。旋律上行时，跃迁算子内的乘数小于1；旋律下行时，跃迁算子内的乘数大于1。“跃迁算子”概念用于不同的生律法。“跃迁算子”跃迁所跨越的音程可能很小，这样的跃迁是隐形的，难于觉察的；所含的乘数可能是一个相当复杂的比值，实际上体现了不同律制间的转换，甚至进入了前所未知的律制领域。

② “跃迁算子”作为术语表达形式的完善和正式提出是在2001年春天，在广东省艺术中专讲座讲义《借助数理为音乐回归自然辨明航向》中。而在这之前，就已被允许正式用于李玫的博士论文《“中立音”音律现象》第二章《关于方法论的解释以及中立音审美意义的音乐物理学依据》（2000年）。

乘数或为音程系数，或为音程系数的倒数）。

上行旋律音程的波长跃迁变化表现为：

先有（较低者）波长×音程系数的倒数=后继（较高者）波长

下行旋律音程的波长跃迁变化表现为：

先有（较高者）波长×音程系数=后继（较低者）波长

跃程值：有助于表述旋律上行下行时的幅度。上行旋律音程表述为“+音程值全音数”；下行旋律音程表述为“-音程值全音数”。

这对概念不仅可以描述旋律音程的迭宕变化，还可以分析貌似音程的细微变化和同律位乐音自身的变化。

2. *生律法是运用跃迁算子与跃程值作为操作模式的实例*

要从已有的某律生出比它高一定音程的另一律，就应规定一定比率，从已知的长度推算出短于它的另一长度，生律规则表述为：

跃 程 值：　　　　+音程值

跃迁算子：　　　　$\times \frac{1}{\text{音程系数}}$

例如“三分损一”。

0　　　　+3.51　　　　=3.51
黄钟　　　　三分损一　　　　生林钟
81　　　　$\times \frac{2}{3}$（纯五度的音程系数的倒数）　　　　=54

要从已有的某律生出比它低一定音程的另一律，就应规定一定的比率，从已知的长度推算出长于它的另一长度。生律规则表述为：

跃程值：　　　　-音程值

跃迁算子：　　　　×音程系数

例如，“三分益一”。

3.51　　　　-2.49　　　　=1.02
林钟　　　　三分益一　　　　生太簇
54　　　　$\times \frac{4}{3}$（纯四度的音程系数）　　　　=72

在上述两例内，律数=相对波长×81。《管子》之所以设定出发点“宫”的律数为81（=3×3×3×3），是为了使生律的结果“五音”（宫 徵 商 羽 角）的律数全都是整数。此处对“三分损益”的运用次序先后，与《管子》所述有所不同，而适应《吕氏春秋》、《淮南子》的有关记述。

第二节 与音律相关的长度认识所经历的正反合历程

在计量音程大小方面，历史上曾经历了不同的认识阶段。

一、长度比值（Length rate）古代各种文化用长度表述音律

古人早已发现了物体振动发音的基本规律，那就是宏、大、粗、长的振动体对应低的声音，而微、小、细、短的振动体则对应高的声音。古人通过发音体（管、弦）的长度比例关系来理解并计算音程，这个比例可以用整数比的形式来表示。比如：相距纯五度的两个音发音体的长度，较低者的长度：较高者的长度=3：2，或写成假分数的形式$\frac{3}{2}$。相距纯四度，其长度比为4：3，比值为$\frac{4}{3}$。相距纯正协和的大三度，其长度比是5：4，比值为$\frac{5}{4}$。

1. 中国的律数

在中国，这种对音律规律的认识被记载在历代相关典籍中，即古代律学文献中的“律数”。例如：

《管子·地员篇》（约成书于公元前4世纪，管子本人的生活年代约为公元前730~645年）最早记录了五音与律数的关系：

阶名：	徵		羽		宫		商		角
律数：	108	:	96	:	81	:	72	:	64
相对弦长：	$\frac{4}{3}$		$\frac{32}{27}$		1		$\frac{8}{9}$		$\frac{64}{81}$

这个律数数列是以三分损益之法①得出的五个音的有效长度，根据这个数列，可以求出它们之间的相对弦长关系；此后，历代乐律文献的记载，仍是以三分损益法为主，在解决“旋相为宫”的目标追求下，律位不断增加，呈现出更多的长度比变化。

2. 古希腊一弦器反映的弦长比传统

古希腊哲学家兼数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前582~493年）在研究音律变化的规律时，以有一个可移动琴码的独弦器（monochord原义为“单弦”）作为校音工具，对律学进行研究。这表明他不仅发现了音律的变化规律，而且以实践为根据对音律理论进行长度表述。

3. 阿拉伯乌德反映的弦长比传统

阿拉伯人的律学研究一直围绕着对拨弦乐器乌德（Ud）指位系统的改造而展开。指位的变化改变了弦长而引起音高的变化，人们从实践经验中早就掌握了这其中的变化规律，并早在9世纪时，就已经能够对中指指位给出确切的弦长比值。

---

① 记载于史籍的生律法，不仅是权威的律学生律法，而且对中国古代乐学理论有着深刻影响。

4. 印度“斯鲁蒂”反映出的弦长认识方法

印度人是发明弦乐器的天才，早在公元前就出现的琉特类乐器和公元后出现的板式、棒式齐特尔类琴，为掌握弦长比变化做好了物质准备。印度人把他们对相对弦长之间差额的观察经验表述为含若干个“斯鲁蒂”。

上述几种文化中的律学研究都是与对长度的观察、测量和比较联系起来的。虽然这时对长度的思考还局限于物质材料（弦长或管长）的粗略，但表达的结果与现实经验是一致的，即前边提到的宏——细顺对应的关系。

二、频率比值（Frequency rate）近现代律学研究方法的变化

到了近代，由于物理学的发展，人们认识到从单位时间内的振动频率出发，可以更精密地研究音高，音程关系也就通过频率比来理解和计算了。同样是相距纯五度的两个音，较高者的频率：较低者的频率 $=3:2=\frac{3}{2}$。虽然这个比率数值与长度比的比率数值是相同的，但数字所代表的两音的高低则与古代相反。

近代物理学对空气振动频率比的宏观实验操作与计算表现出了和现实经验相反的对应：较低的音对应于较小的频率数，较高的音对应于较大的频率数。这个实验结果无疑是正确的，但这个结果却与实际经验互相颠倒。互相颠倒的原因在于，频率是取单位时间的长度（秒）除以每次振动所占时间的长度（振动周期）所得的商，商与除数两者处于反比例，因而带来了对于音律的数值表述上的理论与实践的矛盾。

这个矛盾首先不是一个事关对或错的性质的矛盾。我们不必怀疑实验室测量出来的数据结果；但也不会因为科学实验室中的实验结果而否定我们原本从生活实践中观察到的经验。所以对这个矛盾，我们不能简单地废弃此或彼，而应该寻找新方法来解决这个矛盾。

其实，用长度表述还是用频率表述，这两者之间是有共性的。一个音程对应的两个数所构成的比值，其结果总是两个：大于 1 或小于 1，如前边所说的，假分数或真分数。

以纯五度为例，比较几种不同的表述方法：

1. 以振动频率数来描述：

以当代标准音 a^1 为例，每秒振动次数为 440 次，比它高纯五度的音，每秒振动次数为 660 次，这是无条件的。

a^1 与上方纯五度音之间音程关系的音程系数 $=\frac{660}{440}=\frac{3}{2}$

这是一个大于 1 的假分数。

2. 以有效弦长来描述：

设一根弦的基音为 1，那么该弦上方纯五度那音就是：

$1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ 这就是延用了数千年的“三分损益法”，得出的结论是小于 1 的真分数。

所以，在真数领域里，它们之间只是互为倒数。

三、周期比值（Cyc. of vibration rate）现代物理学为律学思维带来质的飞跃

随着现代物理学的发展，对发音体的振动状态也进入了微观思考。频率是指发音体"振动一秒钟"的振动数目，而我们在音乐的辨听中，从不需要对一个音不多不少正好听一秒钟。对于人的听觉分辨而言，真正与一定音高的音律无条件地联系在一起的物理学规定性是振动周期。只有使用振动周期才是真正进入到对音波振动状态的微观量度的把握。因而，从对频率的关注转入到对周期的细微把握，就是历史的必然。例如，振动频率为每秒440次，振动周期就是每次$\frac{1}{440}$秒，即时间中的波长。这就有了周期比值这第三种表述方法。

1. *以相对波长来描述：*

有了绝对波长，就不难求出相对波长：两个音的绝对波长之商为"相对波长"。

$$某音律的相对波长=\frac{该音律在时间中的绝对波长}{作为基准的音在时间中的绝对波长}$$

a^1 音的绝对波长为$\frac{1}{440}$，上方纯五度 e^2 音的绝对波长为$\frac{1}{660}$，

$$e^2 音的相对波长=\frac{\frac{1}{660}秒}{\frac{1}{440}秒}=\frac{2}{3}$$

很显然，相对波长之间的比例关系和古代律数长度的比例关系是一致的。

在经历了从古代对弦长、气柱长等的长度比表述，到近代物理学对频率比的宏观实验操作与计算，继而发展到对音波的振动周期比的微观量度表述——这样一个正反合的认识历程，真数领域的表达就又能够回到低者较长、高者较短的顺对应关系，这不仅与我们的经验相吻合，而且是真正的本质表述。从器物转向音波本身的方法，既回到长度，又超越了器物，这也是这个时代所应有的超越。

古人早已抓住了音程的本质，但对本质把握的手段途径的运用却有一个漫长的历史发展过程：古代是对器物的相对长度（律数）经验性认识，现在是对音波的相对长度科学量化认识；从古代对弦长、气柱长等的长度比表述，到近代物理学对频率比的宏观实验操作与计算，继而发展到对音波的振动周期比的微观量度表述，就又回到了低者较长、高者较短的顺对应关系，与我们的经验相吻合。前面所说长度比、频率比、周期比诸概念依次递变，经历了认识上的由粗略到精细，由经验到本质把握的过程。

总而言之，从长度比到频率比的认识过程非常缓慢，而现代律学从现代物理学中得到的营养，则能够敏捷地反思对音波的宏观实验通过频率的把握，而迅速转入到微观量度通过周期的把握。

2. *谐音列与周期比的对应*

任何一个乐音所包含的谐音列，无论具体频率数值是怎样的，我们都可以用一系列振动周期导出的相对数值来表示其物理量，它们的规律性是确定不移的，代入上列公式计算便可揭示出来。

例 2



运用相对波长的两个重要意义在于，一来，超越了各具体物质材料发音条件中有多种因素的牵连，振动方式也不同的局限，无论弦振动、体振动、膜振动、气柱振动等等，全部转入对音波波长的微观量度把握；二来，相对波长突破了相对弦长只适用于一条弦的局限性，并且贯通古今中外所有的音程知识和使用长度单位的传统（相对长度在中国古代以“律数”出现，而在古印度、古希腊、古阿拉伯则用“相对弦长”）。

第三节　真数与对数两个领域里的沟通对应

在律学研究中，上述办法使真数领域内的颠倒得到回归。但还有另一对矛盾需要厘清，即上一节表 5 所列出的对应关系：真数领域里（以振动周期或相对波长为例）低大高小和对数领域里（以用音分数表述相对音高为例）低小高大。这两者能否沟通，如何对应？

我们必须冷静地看到，我们面对音波振动而听到不同的音高时，事实的两个方面在人类的认知结构中呈现为“互相颠倒”的两个要素：我们的听觉把音的高度想象成一个纵向的标尺。比基准高者为正数，音越高数值越大，比基准低者为负数，音越低其代数值越小（这是认知结构的感性要素）；同时，我们的认知结构又必须确认，越是高的音，音源振动体越小，波长越短，越是低的音，音源振动体越大，波长越长（这是认知结构的理性要素）。这两个要素呈现为两种不同的维度。可以用“埃菲尔铁塔”的形象来比喻两种不同的维度，纵向维度描述高度，位置越高，高度的数值越大；横向维度描述塔身的宽度广度，基座很宽很广，越往上伸就越收越窄了。人类对音波音高认知结构中这两种维度的“大小颠倒”来自物理与心理的实际状况，是不可消除的，只有清醒地确认才可能达到正确的理解。另一方面，近代声学习惯用频率概念，却把音波本身存在的状态作了“大小颠倒”的把握：音低数小，音高数大。其结果，就把人类认知结构中两种维度之间的“大小颠倒”抹掉了，遮蔽了，掩盖了。许多物理学家认为，在音高的标尺上“低小高大”，跟用频率描述的“低小高大”，两者顺对应是十分自然合理的，两者以对数与真数的关系互相对应也是数理的必然，是别无选择的表述方式。但在这里我们要郑重地指出：用这种方式来抹掉、遮蔽、掩盖人类认知结构中两个层面－维度天然固有的相互关系，已经导致了对人类认知结构的误解，在律学学科的概念体系中埋伏了违反事实的扭曲。

现在要提出的问题是：真数领域里（振动周期或相对波长）的低大高小，跟对数领域里（相对音高）的低小高大，两者的对应关系如何才可以以科学的语言建立起来？是否可

以利用数学的关系式来表述呢？

针对这个问题，我们也能找到解决方案，并做数学说明。

真数的数值可以很容易地换算成对数数值。用算理公式，我们可以根据音程的数值算出音高。

一、用不同文化圈所用的音程值单位来表述从相对波长到相对音高的推算过程

1. 用“音分（cent）”作音程值单位名称，算理公式为：

$\mathrm{Log}_{1200\sqrt{\frac{1}{2}}}$相对波长（$N$）

算理公式利用换底公式进行推导，可以得到实用公式。

根据换底公式：$\mathrm{Log}_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$，求实用公式：

$$\mathrm{Log}_{1200\sqrt{\frac{1}{2}}}N=\frac{\log_{10}N}{\log_{10}1200\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_{10}N}{\log_{10}2^{(-1)\times\frac{1}{1200}}}=\frac{\log_{10}N}{(-1)\times\frac{1}{1200}\log_{10}2}=\frac{-1200}{\lg 2}\cdot\lg N$$

即：相对音高 $=\frac{-1200}{\lg 2}\cdot\lg N$

2. 用“密优（μ）”作音程值单位名称，算理公式为：

$\mathrm{Log}_{1000\sqrt{\frac{1}{2}}}$相对波长（$N$）；

省略换底步骤，实用公式为：

$$\mathrm{Log}_{1000\sqrt{\frac{1}{2}}}N=\frac{\log_{10}N}{\log_{10}1000\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_{10}N}{\log_{10}2^{(-1)\times\frac{1}{1000}}}=\frac{\log_{10}N}{(-1)\times\frac{1}{1000}\log_{10}2}=\frac{-1000}{\lg 2}\cdot\lg N$$

即：相对音高 $=\frac{-1000}{\lg 2}\cdot\lg N$

3. 用“全音”作音程值单位名称，算理公式为：

$\mathrm{Log}_{6\sqrt{\frac{1}{2}}}$相对波长（$N$）；

省略换底步骤，实用公式为：

$$\mathrm{Log}_{6\sqrt{\frac{1}{2}}}N=\frac{\log_{10}N}{\log_{10}6\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\log_{10}N}{\log_{10}2^{(-1)\times\frac{1}{6}}}=\frac{\log_{10}N}{(-1)\times\frac{1}{6}\log_{10}2}=\frac{-6}{\lg 2}\cdot\lg N$$

即：相对音高 $=\frac{-6}{\lg 2}\cdot\lg N$

二、运算实例分析

现在将所要求的音程的相对波长分别代入上列三种实用公式中，以纯五度相对波长$\frac{2}{3}$为例代入 N：

1）相对音高 $= \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg \cdot \frac{2}{3} = \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg\left(2^{+1} \cdot 3^{-1}\right)$

$= \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \lg 2 + \frac{-1200}{\lg 2} \cdot \left(-\lg 3\right)$

$= -1200 + \frac{-1200}{0.30103} \cdot \left(-0.47712125\right)$

$= -1200 + 1901.95 = 701.95 \approx 702$（音分）

2）相对音高 $= \frac{-1000}{\lg 2} = \cdot \lg \cdot \frac{2}{3} = \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \lg\left(2^{+1} \cdot 3^{-1}\right)$

$= \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \lg 2 + \frac{-1000}{\lg 2} \cdot \left(-\lg 3\right)$

$= -1000 + \frac{-1000}{0.30103} \cdot \left(-0.47712125\right)$

$= -1000 + 1584.96 = 584.96$（密优）

3）相对音高 $= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg \frac{2}{3} = \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg\left(2^{+1} \cdot 3^{-1}\right)$

$= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg 2 + \frac{-6}{\lg 2} \cdot \left(-\lg 3\right)$

$= -6 + \frac{-6}{0.30103} \cdot \left(-0.47712125\right)$

$= -6 + 9.50908 = 3.50908 \approx 3.51$（全音）

以上例子是相对波长为小于 1 的数，求出的对数是负值，得到正的音程值。再看一个相对波长大于 1 的数，基音下方纯五度，相对波长为$\frac{3}{2}$，仅列出求全音数的实用公式：

相对音高 $= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg \frac{3}{2} = \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg\left(2^{-1} \cdot 3^{+1}\right)$

$= \frac{-6}{\lg 2} \cdot \left(-\lg 2\right) + \frac{-6}{\lg 2} \cdot \lg 3 = 6 + \frac{-6}{0.30103} \cdot \left(0.47712125\right)$

$= 6 - 9.509775 = -3.509775 \approx -3.51$ 全音

由此，我们得到结论：在这种公式条件下，相对波长越大，音程值越小；相对波长越小，音程值越大。

那么，在这个“颠倒”的对子中，我们还是看到了其中不变的一致性。

表 6

对数	相对音高——绝对值	越大	越小
真数	相对波长——分数线上下相比	越悬殊	越靠拢

第二章　生律法的自然依据

第一节　谐音列（Harmonic tone series）所含的自然音程

一、谐音列的意义

从古代那些有着久远律学传统民族的律学理论成果来看，生律法所用的长度比例，都是一些简单整数比，这是有自然根据的。一个乐音内部存在着一个基音和一系列泛音的音程结构，这个原理虽然迟至17世纪才被发现，① 但这个音响事实却是古已有之的，它对原始人类的和谐感早就发生了作用，从世界范围内普遍存在的古老乐器口弦、鼻笛等泛音乐器可见，人类很容易获得协和音程感的经验。几大文明古国不约而同地发现并使用谐音列最前边的几个音作为生律法依据，正说明了音响协和的普遍规律。中国古琴的徽位设置就是谐音列前段的物化显现，涉及了前8个谐音。认识谐音列所含的种种音程是任何世代的律学研究不可离弃的根基所在。谐音列包含弦振动时的全弦振动所发出的基音（fundamental tone）和各分段振动所发各"泛音"（overtone，也称"分音" partial tone），又称"分音列"。长期以来被称为"泛音列"，也称"倍音列"。这里需要强调说明"倍音列"称谓的错误及来由。"倍音"的称谓来自对频率的认识，自基音以后，各分音的频率依次为基音频率的若干倍，第几分音的频率也是基音频率的几倍，所以，建立"倍波"的概念是必要的。"倍音"来自日语，汉语若用"倍音"则无法对应于"overtone"。至于音波的"倍"是指某音波振动周期的若干整数倍，可以分别称为"二倍波"、"三倍波"、"四倍波"……"十倍波"等等，这与日语所讲的"倍音"概念的意义绝然相反。

现将谐音列及音程结构与频率比例、周期比例（振动体长度比例同此）列于下：

例3

借用记谱②

谐音号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
频率比例	1 :	2 :	3 :	4 :	5 :	6 :	7 :	8 :	9 :	10 :	11 :	12 :	13 :	14 :	15 :	16 :	17 :	18 :	19 :	20
周期比例	1 :	$\frac{1}{2}$:	$\frac{1}{3}$:	$\frac{1}{4}$:	$\frac{1}{5}$:	$\frac{1}{6}$:	$\frac{1}{7}$:	$\frac{1}{8}$:	$\frac{1}{9}$:	$\frac{1}{10}$:	$\frac{1}{11}$:	$\frac{1}{12}$:	$\frac{1}{13}$:	$\frac{1}{14}$:	$\frac{1}{15}$:	$\frac{1}{16}$:	$\frac{1}{17}$:	$\frac{1}{18}$:	$\frac{1}{19}$:	$\frac{1}{20}$

① 法国音乐理论家梅尔桑(Pater Marie Mersenne,1588～1648年)从弦振动现象发现这一原理并予以表述。

② 第19号谐音要求上行半音解决到第20号谐音,而不像第17号谐音那样下行半音解决。为表明这解决倾向,记谱应作$^{\sharp}d^{3}$。

二、谐音号数与各音的比例当数一致

通常在律学的教科书中总是用泛音列，但为了使各音的号数与各自的比例当数相吻合，以便于描述泛音列的构造，我们说谐音号数而不说泛音号数，即以基音为 1 号谐音，第一泛音为 2 号谐音，第二泛音为 3 号谐音，依次类推，所有自然产生的生律法所依据的音程都可以在谐音列中找到：任何生律法都要用到的八度音程，在谐音列上正是 1 号与 2 号谐音的距离；纯五度是 2 号与 3 号谐音的距离；纯四度是 3 号与 4 号谐音的距离；纯正协和的大三度是 4 号与 5 号谐音的距离……导音到主音之间的小二度是 15 号到 16 号谐音的距离。在 16 号以前每相邻两谐音所构成的音程都被频频使用在各民族的音乐实践中，有些我们已经非常熟悉，有些还缺少理性认识。比如古琴第十三徽按音得到相对弦长$\frac{7}{8}$的特大二度，其律学意义远没有被大多数人所了解并给予重视；而第 11 号、13 号谐音在音乐实践中表达情感时所具有的生动力量，也还没有作为学术公理在教科书中得到一席地位。

前边介绍的从频率比过渡到音程系数概念，促使人们意识到这比值显示着音程的本质，接着曾让读者进一步意识到音程系数中分子分母两个数恰恰对应于两个谐音号数，让读者很容易地把某两个谐音之间的音程关系（感性关系）跟用相应的谐音号数构成的音程系数（理性关系）彼此对应起来。这方法之所以准确可行，观察例 3 就能理解：每个谐音号数总是等于周期连比式内该项的分母数。频率比带给人的沉重负担顿时消解，在感性与理性之间，在对音程的感觉与理解之间找到一条最简捷的通道。

在例 3 中我们已经看到谐音号数和被认做真数的质数①（prime number）相吻合，作为理论律学，我们应该提供一些基本数据，以便使用者在换算过程中可以很容易地查出一些质数的常用对数。在第一章第一节中，我们提到了“比例常数”$\frac{6}{\lg 2}$，现在只需要查出各个质数的常用对数，再把这些对数数值各自与比例常数相乘，就可以得到这些质数与 1 号谐音之间的音程值。

三、真数换算成对数的基本数据表

表 7　（第 20 号以前的 7 个质数）

质数	常用对数	比例常数与常用对数相乘所得
3	$\lg 3 = 0.4771212547$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 3 =$ 9.5097750
5	$\lg 5 = 0.6989700043$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 5 =$ 13.9315686
7	$\lg 7 = 0.8450980400$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 7 =$ 16.8441296
11	$\lg 11 = 1.041392685$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 11 =$ 20.7565897
13	$\lg 13 = 1.113943352$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 13 =$ 22.2026383
17	$\lg 17 = 1.230448921$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 17 =$ 24.5247771
19	$\lg 19 = 1.278753601$	$\frac{6}{\lg 2} \times \lg 19 =$ 25.4875651

① 只能被其本身和 1 整除而没有余数的整数，又称素数。

根据上述基本数据，把2至10这九个谐音号数都认做真数，求出相应的对数。

表8

音程距离	求对数表达式	音程值（单位：全音）
1号与10号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 10$	19.9315686
1号与9号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 9$	19.0195500
1号与8号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 8$	18
1号与7号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 7$	16.8441296
1号与6号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 6$	15.5097750
1号与5号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 5$	13.9315686
1号与4号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 4$	12
1号与3号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 3$	9.5097750
1号与2号谐音	$\frac{6}{\lg 2}\times\lg 2$	6

取相邻两项相减，就得到相邻两谐音相距的全音数，由此可以编制出谐列音前10个谐音之间的音程一览表。

表9

音程名称	音程系数	音程值（全音）
小全音	$\frac{10}{9}$	0.9120186≈0.91
大全音	$\frac{9}{8}$	1.019500≈1.02
特大二度	$\frac{8}{7}$	1.1558704≈1.16
特小三度	$\frac{7}{6}$	1.3343546≈1.33
纯律小三度	$\frac{6}{5}$	1.5782064≈1.58
纯律大三度	$\frac{5}{4}$	1.9315686≈1.93
纯四度	$\frac{4}{3}$	2.4902250≈2.49
纯五度	$\frac{3}{2}$	3.5097750≈3.51
纯八度	2	6

谐音列提供了认识律学内涵的杠杆，从以往的“泛音列”转换成“谐音列”，不仅仅是一个术语的改变，更重要的是让一个信息点放射、发挥出更大的知识潜力，由此举一反三，获得一系列相互关联的理论数据。以上三个表格中的数据都是从谐音号数出发而得出，所以这不只是一个术语的变更，而是建立系统化研究方法的基石。

第二节 各种律制概述

古人最初制造乐器，音高的调适是经过了偶然发现及多次偶然经历的重复，最终获得经验，经验被归纳总结成了规律，于是乐器的发展也从最初的单管单音发展到多管多音，最后达到单管多音，弦乐器也是一弦一音至一弦多音。这种经验被记录下来，就成为最古老的有关音律研究的记载。各个民族在自然听觉的基础上，还有自己独特的文化听觉，这就有了对生律法依据的不同选择，在纯八、纯四、纯五度的框架内，还有若干不同的生律因素。生律法不同，也就形成了不同律制。

由于律制发展得较复杂以后，音乐上循环旋宫与自由转调的要求，推动律学必须去寻找这个可能性，于是在八度这个自然音程的框架内，运用开方的方法建立了平均律。因为这个系统除八度音程外，其他所有音程都偏离自然规范，故被称为“人工律”，而以往各种依据自然音程生律而形成的律制则统称为“自然律”。

一、五度相生律（system of tuning in perfect fifths 或 Pythagorean intonation）

在八度关系倍半相生的前提下，以纯五度、纯四度两种音程为生律法依据，建立起一个律学体制，称为五度相生律。由于这种上五度、下四度的生律，以及相反方向的下五度、上四度生律，涉及“三分三倍”，所以称“三分三倍生律法”能更准确体现这个律制的特点。中国古代的“三分损益律”、古希腊按毕达哥拉斯（Pythagoras）定律法所建立的律制，中古阿拉伯人继承古希腊文明采用纯四度相生法建立的律制，都属此类。毕达哥拉斯在公元前6世纪时提出五度相生律，并认为用五度相生法可以得到音乐中所有的音。因此，在西方通常称为“毕达哥拉斯律制”，五度相生律音程也被称为“毕达哥拉斯”音程。中国古代“三分损益法”也是在差不多同时期提出，这正说明人类听觉能力的成长和对自然音律的认识是有共性的。

1. 含“清角”的七声音阶

如从C出发，向上五度、下四度方向生律5次，再向上四度、下五度方向生律1次就可以得到如下七声音阶（下徵调音阶，见表10）。不过，三分损益法不允许上四下五度方向的“三倍”反生，这曾被隋代郑译斥责为“乖相生之道”。但历史悠久的古琴却一直用着“反生法”，占统治地位的理论出于僵化的观念与自然相生之道相悖，却挡不住智慧的发展，古琴作为一个“活化石”，明明白白地记录了这个依托于实践机制上的律学体制，即古琴第十徽的音律设定（$\frac{3}{4}$），这个徽位的设定是由“四分”而来，已经背离了“三分”的基本法。

表 10　含“清角”的七声音阶①

校正值（全音数）		+.02	+.04	-.01	+.01	+.03	+.05	
中国传统阶名	官	商	角	清角	徵	羽	变宫	官
现代音名	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	b^1	c^2
各音发音体长度比例即相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0	1.02	2.04	2.49	3.51	4.53	5.55	6
相邻两音长度比值（即音程系数）		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
相邻两音音程值		1.02	1.02	0.45	1.02	1.02	1.02	0.45

2. 含“变徵”的七声音阶

历史上，“三分损益法”不允许向下五度反生，那么按中国古代传统，从黄钟出发，用“三分损益法”向上五度下四度方向生律6次，就得到雅乐“正声”七声音阶，即含“变徵”的七声音阶（见表11）。

表 11　含“变徵”的七声音阶

校正值（全音数）		+.02	+.04	+.06	+.01	+.03	+.05	
中国传统阶名	官	商	角	变徵	徵	羽	变宫	官
现代音名	c^1	d^1	e^1	$^\sharp f^1$	g^1	a^1	b^1	c^2
各音发音体长度比例即相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0	1.02	2.04	3.06	3.51	4.53	5.55	6
相邻两音长度比值（即音程系数）		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
相邻两音音程值		1.02	1.02	1.02	0.45	1.02	1.02	0.45

3. “三分损益律”十二律

从黄钟出发，生律11次，就可以得到“三分损益律半音音阶”（见表12）。

表 12　“三分损益律半音音阶”②

校正值（全音数）		+.07	+.02	+.09	+.04	+.11	+.06	+.01	+.08	+.03	+.10	+.05	
中国古代律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	黄钟清
现代音名	c^1	$^\sharp c^1$	d^1	$^\sharp d^1$	e^1	$^\sharp e^1$	$^\sharp f^1$	g^1	$^\sharp g^1$	a^1	$^\sharp a^1$	b^1	c^2
各音发音体长度比例即相对波长	1	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0	0.57	1.02	1.59	2.04	2.61	3.06	3.51	4.08	4.53	5.10	5.55	6
相邻两音长度比值（即音程系数）		$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$
相邻两律音程值		0.57	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.45

---

① 参见赵宋光、韩宝强撰写的《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》律学条目，第405页。

② 同上。

从表 12 我们可以看到，在五度相生十二律音阶上，半音有两种：一种是小半音，长度比为 256：243（$\frac{256}{243}$），音程值为 0.45 全音（90 音分），现代记谱为小二度，古希腊称为“林玛”（limma），共有 7 处；另一种是大半音，长度比为 2187：2048（$\frac{2187}{2048}$），音程值为 0.57 全音（114 音分），现代记谱为增一度，古希腊称为“阿波托美”（apotome），共有 5 处。同样，全音也有两种：一种是大全音，长度比为 9：8（$\frac{9}{8}$），音程值为 1.02 全音（204 音分），现代记谱为大二度，这是五声音阶中就拥有的，即为普通大二度，也是谐音列上第 8、9 号谐音之比；另一种是小全音，即两个“林玛”半音相加，音程系数为“林玛音程系数”的平方［（$\frac{256}{243}$）^{2}］，无射正律和黄钟半律之间、仲吕正律和林钟正律之间正是这样的距离。长度比为（$\frac{256}{243}$）^{2} = 65536：59049 = 2^{16}：3^{10}，音程值为 0.9 全音（180 音分），从式中 3 的幂指数可知，第 10 次生律就能构成五度相生律小全音。

三分损益法相生 12 次得到第 13 律，长度略短（音略高）于首发律黄钟，两者的长度比是 531441：524288（即 3^{12}：2^{19}），即音程系数为 $\frac{3^{12}}{2^{19}}$，音程值为 0.12（三分损益每相生 1 次有 3.509775 − 3.5 = 0.009775 全音≈0.01 全音的“小微音差”，相生 12 次，累积为 0.12 个全音，约为 24 音分）。这就是所谓“周而不能复始”，引起了中国古代乐律学史上一个长久不衰的研究课题，即如何解决“仲吕上生不及黄钟”的问题。古希腊的律学研究者也发现了这个音差，称之为“毕达哥拉斯音差”，我们现在称之为“古代音差”或“最大音差”（comma maxima）。其实，大半音和小半音之间也相差一个“古代音差”，具体求解过程为：

大半音的音程系数 ÷ 小半音的音程系数

$$= \frac{2187}{2048} \div \frac{256}{243} = \frac{3^7}{2^{11}} \div \frac{2^8}{3^5} = \frac{3^{12}}{2^{19}}$$

解决这个音差的律学研究活动先后因不同的发展方向而产生了“京房六十律”和钱乐之三百六十律、何承天新律和朱载堉新法密率（十二平均律）。

4.“三分三倍生律”十二律

这种“三分三倍生律”而得的十二律在中国古代历史上是实践存在，古希腊的“毕达哥拉斯律”也是这样一种律制。在表 12“三分损益律半音音阶”中缺少小七度和小三度，增六度“无射”和增二度“夹钟”两律是相生第 9 次和第 10 次得到的，与旋律进行中具有下属功能性质的五度相生小七度和五度相生小三度有着本质的不同，虽然经学家们从不承认这种生律法的存在，但在音乐实践中一直存在着。古籍文献中总以被批评的面貌出现的下徵音阶就是这律制的乐学体现，这种乐、律学结合在一起的整合性思维是必不可少的。现在用双轨推算的方法演示出这两种音程的形成路径。

表 10 已经提供了纯四度是向下纯五度“三倍”反生得到的，五度相生小七度的推算方法是 2 个纯四度相加。

$$\begin{cases} 2.49 + 2.49 = 4.98\ \text{全音} \\ \text{纯四度} + \text{纯四度} = \text{五度相生小七度} \\ \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9} \end{cases}$$

五度相生小三度的推算方法是 3 个纯四度减一个纯八度。

$$\begin{cases} 2.49 + 2.49 + 2.49 - 6 = 1.47 \\ \text{纯四度} + \text{纯四度} + \text{纯四度} - \text{纯八度} = \text{五度相生小三度} \\ \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} \div 2 = \frac{32}{27} \end{cases}$$

表 13 “三分三倍生律半音音阶”

校正值（全音数）		-.05	+.02	-.03	+.04	-.01	-.06	+.01	-.04	+.03	-.02	+.05	
现代音名	c^1	$^{\flat}d^1$	d^1	$^{\flat}e^1$	e^1	f^1	$^{\flat}g^1$	g^1	$^{\flat}a^1$	a^1	$^{\flat}b^1$	b^1	c^2
各音发音体长度比例即相对波长	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
相对音高	0	0.45	1.02	1.47	2.04	2.49	2.94	3.51	3.96	4.53	4.98	5.55	6
相邻两音长度比值		$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{256}{243}$
相邻两律音程值		0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45	0.57	0.45

在“三分三倍生律半音音阶”中，由于有含“三倍”（即分子数可以被 3 整除）生律的六律，相对波长关系比表 12 中所示例的要简单。

二、纯律（Just intonation）——三、六度生律法

除了用纯八、五、四度生律，再增添纯正协和大三度音程（即谐音列上第 4、5 号谐音之间的距离）作为生律法的依据，从而形成的律制，称为纯律。古印度、古希腊（毕达哥拉斯去世后）都有这样的律制探讨和实践运用。它的突出特点是纯律大三度略小于五度相生律大三度，它在谐音列的位置极占优势，我们可以在自然生活中直接获得这个听觉经验，其音响效果谐和；而五度相生律大三度则是相生 4 次才获得的，与基音疏远的四重属关系令其产生紧张性，两者听起来有着很不同的审美意蕴。

1. 纯律的自然音程和派生音程

有了纯律大三度，自然七声音阶中就存在小全音和大半音：小全音是纯律大三度减去大全音（$\frac{5}{4} \div \frac{9}{8} = \frac{10}{9}$），长度比为 10∶9，音程值为 0.91 全音（182 音分）；大半音是纯四度减去纯律大三度（$\frac{4}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15}$），长度比为 16∶15，音程值为 0.56 全音（112 音分）。如此一来，与五度相生律相比，两种律制形成的七声音阶的内部构造就很不相同了。在每个纯四、五度框架（分别代表主、属、下属三个功能）内各加入一个音，与根音相距纯律大三度就会构成自然大调音阶（见表 14），与五音相距纯律大三度就会构成自然小调（见表 15）。纯五度减去纯律大三度就会得到纯律小三度（$\frac{3}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{6}{5}$），长度比为 6∶5，音程值为 1.57 全音（314 音分）。我们现在已经能够从谐音列上看到，这个纯律小三度就是第 5、6 号谐音之间的距离。谐音列提供了纯律大三度和纯律小三度，结合纯八度、纯五度，还可以推算由纯律三度派生出的各种纯律音程。仿照纯律大音阶的构成方式，在纯四、五度框架内各加入一个纯律小三度可以构成和声小调音阶（见表 16）。以下是

双轨推算演示。

纯律小六度的派生方式是：

$$\left\{\begin{array}{l} 6 - 1.93 = 4.07 \\ \text{纯八度} - \text{纯律大三度} = \text{纯律小六度} \\ 2 \div \frac{5}{4} = \frac{8}{5} \end{array}\right.$$

纯律大六度的派生方式是：

$$\left\{\begin{array}{l} 2.49 + 1.93 = 4.42 \\ \text{纯四度} + \text{纯律大三度} = \text{纯律大六度} \\ \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

纯律范畴内三种半音的派生方式是：

$$\left\{\begin{array}{l} 2.49 - 1.93 = 0.56 \\ \text{纯四度} - \text{纯律大三度} = \text{自然半音} \\ \frac{4}{3} \div \frac{5}{4} = \frac{16}{15} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1.93 - 1.58 = 0.35 \\ \text{纯律大三度} - \text{纯律小三度} = \text{同功能变化半音} \\ \frac{5}{4} \div \frac{6}{5} = \frac{25}{24} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1.02 - 0.56 = 0.46 \\ \text{大全音} - \text{自然半音} = \text{反功能变化半音} \\ \frac{9}{8} \div \frac{16}{15} = \frac{135}{128} \end{array}\right.$$

小七和弦内的小七度派生方式是：

$$\left\{\begin{array}{l} 3.51 + 1.58 = 5.09 \\ \text{纯五度} + \text{纯律小三度} = \text{小七和弦内的小七度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{6}{5} = \frac{9}{5} \end{array}\right.$$

大七和弦内的大七度派生方式是：

$$\left\{\begin{array}{l} 3.51 + 1.93 = 5.44 \\ \text{纯五度} + \text{纯律大三度} = \text{大七和弦内的大七度} \\ \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \end{array}\right.$$

纯律增二度的派生方式是：

$$\left\{\begin{array}{l} 5.44 - 4.07 = 1.37 \\ \text{大七和弦内的大七度} - \text{纯律小六度} = \text{纯律增二度} \\ \frac{15}{8} \div \frac{8}{5} = \frac{75}{64} \end{array}\right.$$

表 14 “自然大调音阶”

校正值（全音数）			+.02		−.07	−.01		+.01		−.08		−.06	
现代音名	c^1		d^1		e^1	f^1		g^1		a^1		b^1	c^2
各音发音体长度比例即相对波长	1		$\frac{8}{9}$		$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0		1.02		1.93	2.49		3.51		4.42		5.44	6
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$
相邻两音音程值		1.02		0.91	0.56		1.02		0.91		1.02		0.56

表 15 “自然小调音阶”

校正值（全音数）			+.02	+.08		−.01		+.01	+.07		+.09		
现代音名	c^1		d^1	$^{\flat}e^1$		f^1		g^1	$^{\flat}a^1$		$^{\flat}b^1$		c^2
各音发音体长度比例即相对波长	1		$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0		1.02	1.58		2.49		3.51	4.07		5.09		6
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$	
相邻两音音程值		1.02	0.56		0.91		1.02	0.56		1.02		0.91	

表 16 “和声小调音阶”

校正值（全音数）			+.02	+.08		−.01		+.01	+.07			−.06	
现代音名	c^1		d^1	$^{\flat}e^1$		f^1		g^1	$^{\flat}a^1$			b^1	c^2
各音发音体长度比即相对波长	1		$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$			$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0		1.02	1.58		2.49		3.51	4.07			5.44	6
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$		$\frac{75}{64}$			$\frac{16}{15}$
相邻两音音程值		1.02	0.56		0.91		1.02	0.56		1.37			0.56

2. 音系网的重新诠释

在以往的律学研究中，对纯律表述所用的纯律音系网，其平面布局非常合理，但对这个音系网络律学内涵的表述却很不清晰。它既没有表达出纯律音律亲缘关系的本质规定性，也没有清楚展示出与十二平均律的不同。现在我们将赋予这个音系网一些新的信息，使它具有表达本质与描述现象的功能。

（1）音系网的平面布局保持不变，横向线段表示的纯四、五度亲缘关系，上五度下四度在基音以右，下五度上四度在基音以左；斜向右上、左下为纯律大三度和小六度，上大下小；斜向左上、右下为纯律小三度和大六度，上小下大。这种结构关系将用相对波长和校正值体现出来，书写格式为相对波长数值写在音名字母的下方，附注校正值写在音名字母的上方。

（2）相对波长的数值演变规律为：a. 横向线段每向右扩展一步，相对波长数值乘以一

次“$\frac{1}{3}$”；横向线段每向左扩展一步，相对波长数值乘以一次“3”。相对波长连续乘以“2”或“$\frac{1}{2}$”，只是意味着连续移低八度或移高八度，所以可以在填写相对波长数值时将质因数“2”一概省略。其伸展样式为：

$$\underset{27}{F} \longleftarrow \underset{9}{C} \longleftarrow \underset{3}{G} \longleftarrow [\underset{1}{D}] \longrightarrow \underset{\frac{1}{3}}{A} \longrightarrow \underset{\frac{1}{9}}{E} \longrightarrow \underset{\frac{1}{27}}{B}$$

图1

b. 斜向右上每扩展一步，相对波长数值乘以一次“$\frac{1}{5}$”；斜向左下每扩展一步，相对波长数值乘以一次“5”。其伸展样式为：

$^{\sharp}A$ $\frac{1}{25}$

$^{\sharp}F$ $\frac{1}{5}$

D 1

$^{\flat}B$ 5

$^{\flat}G$ 25

图2

c. 斜向左上每扩展一步，相对波长数值乘以一次“$\frac{3}{5}$”；斜向右下每扩展一步，相对波长数值乘以一次“$\frac{5}{3}$”。其伸展样式为：

$^{\sharp}G$ $\frac{9}{25}$

B $\frac{3}{5}$

D 1

F $\frac{5}{3}$

$^{\flat}A$ $\frac{25}{9}$

图3

通过以上三种相对波长数值演变规律可以看出，以D音为中心，横列呈现出“三分三倍链”，斜向纵列则呈现出“五分五倍对称”。

（3）校正值演变规律为：横向线段每向右一段，校正值+.01；横向线段每向左一段，校正值-.01。斜向线段每右上扩展一步-.07；斜向线段每左下扩展一步+.07。斜向线段每左上扩展一步-.08；斜向线段每右下扩展一步+.08。所以从基音朝着六个方向扩展的样式如下：

$\overset{-16}{^{\sharp}G}$ $\overset{-14}{^{\sharp}A}$

$\overset{-08}{B}$ $\overset{-07}{^{\sharp}F}$

$\overset{-03}{F} \leftarrow \overset{-02}{C} \leftarrow \overset{-01}{G} \leftarrow D \rightarrow \overset{+01}{A} \rightarrow \overset{+02}{E} \rightarrow \overset{+03}{B}$

$\overset{+07}{^{\flat}B}$ $\overset{+08}{F}$

$\overset{+14}{^{\flat}G}$ $\overset{+16}{^{\flat}A}$

图4

（4）纯律音系网：每横列第一行为附加校正值，第二行为音名字母，第三行为相对波长数值（提取了质因数2）。

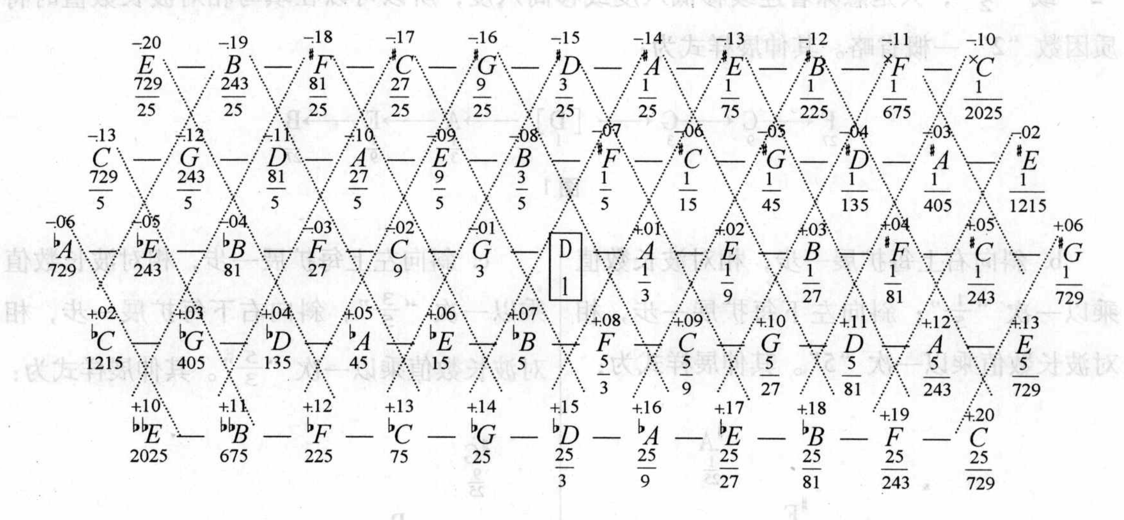


图 5

以上这个增加了全息信息量、具有严密逻辑的音系网，每个横列都是一个“三分三倍链”，每一条斜线都呈现出以中央横列为轴的“五分五倍”对称。从真数、对数两个层面展示了数理规律的完美对称。但对传统音系网的重新诠释并不只是为了显示数理对称的美感，而是通过这个严密对称的结构张显出隐藏在其中的功能性理论内核，并辅以清晰的现象描述，为和声学理论被十二平均律遮蔽的思维缺陷找出解决之道，使理论律学研究直接与和声学、旋律学链接起来；以 D 为主音，可以将古今中外各种调式予以同主音综合，进行跨时代、跨地域、跨文化的比较研究，为民族音乐学提供形态分析的理论基础。

三、平均律

十二平均律（Twelve－tone equal temperament）和二十四平均律的建立，用现代数学术语表述很简单：它就是对八度音程系数进行开方运算的结果。频率比值 2 开 12 次方，方根就是平均律半音音程系数的频率比数值，平均律半音 $=\sqrt[12]{2}=1.0595$。如此，八度音程就被均匀地分为 12 个相等的间距。再将平均律半音音程系数的频率比数值开平方，则得到 1/4 全音数的频率比数值，12 个均匀间距就又被分为 24 个均匀间距。然而在历史上，却经历了漫长的探索。各民族在各自不同的乐系之下，从各自的自然律传统出发，分别经过艰苦探索，最终殊途同归地到达十二平均律的一致认识，并产生相仿的平均律制。

需要强调指出的是，对八度音程系数进行开 12 次方，将八度音程均分为 12 个相等半音，这是对数领域里的 12 等差数列，① 与真数领域内的 12 等差数列是完成不同的概念。

① 等差数列（Arithmetic Series），即一个数列，如果从第二项起，每一项减去它的前一项所得的差都等于同一个数，这个数列就叫等差数列。

真数领域里的等差数列是共泛音结合的各音律所形成的序列，其形式是谐音列的倒映，所含的各音程关系与谐音列中所含的相同，只是上下恰恰颠倒。这些音程依次为：纯八度、纯五度、纯四度、纯律大三度、纯律小三度、特小三度、特大二度、大全音、小全音、特大中立二度（$\frac{11}{10}$，0.83 全音）、中立二度（$\frac{12}{11}$，0.75 全音）。每个音程的音程系数都是有理数。而十二平均律在倍半关系的基础上用开方的方式得到了对数领域均等高度的 12 个半音，但相对应的音程系数却是无理数。比如：

表 17

	自然音程纯五度	平均律音程五度
音程值	3.5097750（无理数的近似值）	3.5
音程系数	$\frac{3}{2}=1.5$	1.4983071（无理数的近似值）

在平均律模拟整数关系时，它近似于整数关系的范围内，这时它是有审美价值的，但这个审美价值不是来自于无理数，而是由于它模拟整数关系，中耳和内耳的共振关系已经将那些偏离整数关系的音程纳入到整数关系中，耳蜗里毛细胞的选择性决定了它们只对那些合乎整数关系的音程产生共振。例如，十二平均律五度、四度只有细心分辨，才可以感受到拍音，听觉器官的共振已把它们纳入到整数关系的规范中，这时的审美价值就不是来自于无理数，而是由于它对整数关系的模拟。音乐听觉的审美无论协和或不协和，都服从于整数比例关系。这一点绝不可忽视。

现实中存在着一种误会的理解，认为宫调式七声音阶的音阶结构与自然大调音阶结构是一样的。从表 10 含“清角”的七声音阶和表 14 自然大调音阶的对比可以看出，它们的律制规范是不同的。这种不同决定着音乐的旋法发展，所具有的不同审美效果也是具体可感的。比如宫调式主音上大三度音程是三分损益相生四次才产生的，这种律学属性决定了它与主音之间的关系正好是比较远的，是不协和的，因此而带给旋律进行上一种扩张的动力，于是在这两音中会形成规模长短不等的旋律绕行。在民间小曲儿中，鲜见大三度的直接连接。而五度相生律中小三度音程的和谐度却高于大三度，因为它是三倍相生三次而得，少了一个五度级。在民间小曲中五度相生小三度的旋律进行甚至可以认定为是级进。自然大调和谐三度所具有的纯净、安祥的气质来自它的简单整数比性质，振动比值越简单，效果越和谐，这个乐音世界的法则早已被发现和证明。十二平均律构成的七声音阶可以模仿宫调式也可以模仿自然大调，但音乐的审美实现究其本质却并不是来自十二平均律。

在了解了十二平均律产生的方法后，我们就应该思考一个问题，那些被称为东南亚九平均、七平均律或五平均律，究竟是一个真实存在，还是理论误区？这些音乐文化的所有者，早在数学开方术发明之前就已经拥有这样的音乐，那么这种音律习惯是怎样产生的，它的物质条件是什么？既然真数领域里等差数列并不形成等差律，那么匀孔、匀品类的乐器就不可能是任何一种平均律制。这个问题留在下文讨论。

四、其他各种生律法

1."七分七倍生律"

在音乐实践中，当属功能强化要求加自然七度形成属七和弦，即已引进七分生律所生音律（参见第7号谐音）；下属功能强化要求在下属小和弦基础上加下属音下的小三度（转位称下属音上的大六度），这就引进了七分七倍生律所生音律。

这种音律要求是基于和声学的基本思想而产生的。被称为"和声学之父"的扎里诺（1517～1590年）根据对一根弦的和谐划分和等差划分，说明和声产生的原理，他用1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$作为大和声的代表，1、2、3、4、5、6这个等差数列作为小和声的代表。大三和弦三个音的相对波长连比式为：$\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$；小三和弦的自然数连比式为：6∶5∶4。这种观点影响深远，自那以后的多数和声学理论家如拉摩（Jean-Philippe Rameau，1683～1764年）、塔尔蒂尼（Giuseppe Tartini，1692～1770年）、豪普特曼（Moritz Hauptmann，1792～1868年）、亥尔姆霍兹（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholz，1812～1894年）、厄汀恩（Arthur Joachim Von Oettingen，1836～1920年）、里曼（Hugo Riemann，1849～1919年）、欣德米特（Paul Hindemith，1895～1963年）等等都接受了谐音列是大调和声来源的理论，并形成和声二元论观点。虽然在早期，还没有足够的物理手段来证明"共泛音结合"①（即下方共振沉音列）原理，但对于大调与小调具有同等意义与价值，两者来源完全相反这种二元论观点，一直是占主导地位的。在这样的认识基础上，德国莱比锡音乐理论学派所编的和声学教程早在20世纪中叶，就把这类音律纳入到和声功能理论的范畴之内。例如，这学派认为属七和弦的七音是属音上的"自然七度"音（七分音）；自然小调、和声小调、和声大调的所谓"Ⅱ级七和弦"的"根音"，应该是由主音向下派生的"七倍音"。

根据这个观点，"七分生律法"或"七倍生律法"所生的音律也被纳入和声功能理论，仅以纯律（三、六度生律）音系网作为和声功能理论的基础，显然已经不全面了。

（1）属七和弦四个音的相对波长连比式为：$\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{7}$

D大调的属七和弦四个音各自的相对波长数值见下列谱例。

例4

校正值：　+.01　-.06　+.02　-.15

$$\frac{2}{3}:\frac{8}{15}:\frac{4}{9}:\frac{8}{21}$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{7}\right)\times 2^3$$

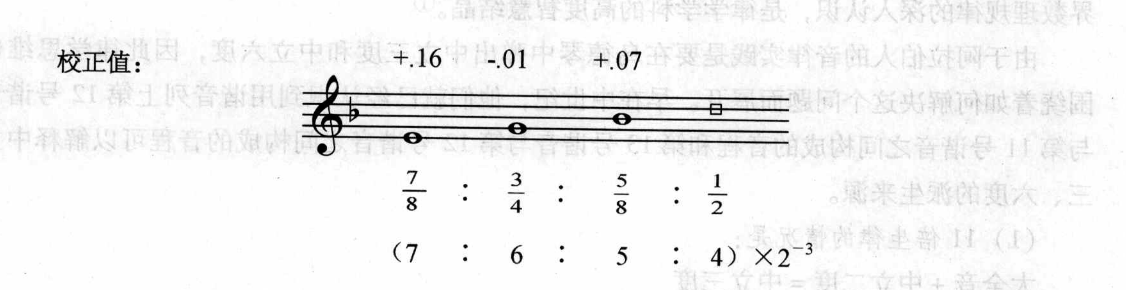
---

① 这个术语由赵宋光在1982年提出。

（2）自然小调Ⅱ级七和弦四个音的自然数连比式为：7∶6∶5∶4

d小调Ⅱ级七和弦四个音各自的相对波长数值见下列谱例：

例5（以比基音高八度的主音$\frac{1}{2}$与之对应）



和声理论在真数领域里的扩展，使生律法从"三分三倍"生律、"五分五倍"生律拓展到"七分七倍"生律。

其实，在中国古琴的实践中，从设徽伊始，就已明确地运用七倍生律，13徽（按音所得相对波长为$\frac{7}{8}$）的设立就是一个具体物证。

（3）"七分七倍生律"的编制规范

作为理论律学的任务，对于人们还不太熟悉的"七分七倍"数理规定要及时做出规范，在本章第一节中表7所给出的基本数据中就有质数7的对数值。分母含7的"七分生律法"，其跃迁算子是"$\times\frac{4}{7}$"；分子含7的"七倍生律法"，其跃迁算子是"$\frac{7}{4}$"。以传统音系网为根据，每一个律位上都可以运用7分生律法生出新的律位。可以设想：把主音D看做下属调（G大调）的属音，以它为根据建立一个属七和弦，这和弦的七音就是"主音上方自然七度"那个音，由七分生律法生出的律位C（-0.16全音），相对波长为$1\times\frac{4}{7}=\frac{4}{7}$。在属音A（$+0.01$）上建立一个属七和弦，这和弦的七音就是"属音上方自然七度"那个音，由七分生律法生出的律位G（-0.15全音），相对波长为$\frac{1}{3}\times\frac{4}{7}\times2^{n}=\frac{4}{21}\times2^{2}=\frac{16}{21}$。把下属音G（$-0.01$）看做重下属调（C大调）的属音，以它为根据建立一个属七和弦，这和弦的七音就是"下属音上方自然七度"那音，由七分生律法生出的律位F（-0.17全音），相对波长为$3\times\frac{4}{7}\times2^{n}=\frac{12}{7}\times2^{-1}=\frac{6}{7}$。

同理，自然小调主音d的下方自然七度（即上方"特大二度"）那音作为自然小调Ⅱ级七和弦的"根音"，① 相对波长为$\frac{1}{2}\times\frac{7}{4}=\frac{7}{8}$

由此，我们已经看到，与纯律音系网的构建同理，原音系网上的每个律位都可以通过跃迁算子"$\times\frac{4}{7}$"、"$\times\frac{7}{4}$"直接生出新的律位。

① 从基础乐理的视角看，把它认作根音，但实际上，它是由共泛音结合的音列派生的七倍波。

2. 11 倍、13 分生律

而在阿拉伯“四分之三音”（中立音）体系中则引进了 11 倍、13 分的生律因素，虽然它们在很长时间内不是世界律学史上的主流，不被人们所重视，但却标志着人类对音律世界数理规律的深入认识，是律学学科的高度智慧结晶。①

由于阿拉伯人的音律实践是要在乌德琴中弹出中立三度和中立六度，因此律学思维也围绕着如何解决这个问题而展开。早在中世纪，他们就已经认识到用谐音列上第 12 号谐音与第 11 号谐音之间构成的音程和第 13 号谐音与第 12 号谐音之间构成的音程可以解释中立三、六度的派生来源。

（1）11 倍生律的情况是：

大全音 + 中立二度 = 中立三度

$$\frac{8}{9} \times \frac{11}{12} = \frac{22}{27}$$

从表 7 中提供的数据可以算出$\frac{11}{12}$的音程值为 0.7531853 全音（150.64 音分）

可知中立三度$\frac{22}{27}$的音程值为：1.02 全音 +0.7532 全音 =1.7732 全音 =354.64 音分

纯五度 + 中立二度 = 中立六度

$$\frac{2}{3} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{18}$$

中立六度$\frac{11}{18}$的音程值为：3.51 全音 +0.7532 全音 =4.2632 全音 =852.64 音分

根据中立三度和中立六度，我们还可以求出“11 倍生律法”的中立三、六度音程与五度相生大三度和大六度之间的跃迁算子。

中立三度与五度相生大三度之间的音程系数就是跃迁算子，根据音程系数的关系式，我们可以求出这两音之间的音程系数：

$$中立三度与五度相生大三度之间的音程系数 = \frac{较低音律的相对波长}{较高音律的相对波长}$$

$$\frac{22}{27} \div \frac{64}{81} = \frac{22}{27} \times \frac{81}{64} = \frac{33}{32};$$

中立六度与五度相生大六度

$$\frac{11}{18} \div \frac{16}{27} = \frac{11}{18} \times \frac{27}{16} = \frac{33}{32}$$

由此得知，“11 倍生律法”的跃迁算子为“$\times\frac{33}{32}$”

（2）13 分生律的情况是：

大全音 + 中立二度 = 中立三度

$$\frac{8}{9} \times \frac{12}{13} = \frac{32}{39}$$

从表 7 中提供的数据同样可以算出$\frac{12}{13}$的音程值为 0.6929 全音（138.58 音分）

---

① 详见下编第四章中对阿尔·法拉比（Al-Fārābī）和伊本·西纳（Avicenna）的介绍。

可知中立三度$\frac{32}{39}$的音程值为：1.02 全音 +0.6929 全音 =1.7129 全音 =342.58 音分

纯五度 + 中立二度 = 中立六度

$$\frac{2}{3} \times \frac{12}{13} = \frac{8}{13}$$

中立六度$\frac{8}{13}$的音程值为：3.51 全音 +0.6929 全音 =4.2029 全音 =840.58 音分

同理，我们也可以求出“13 分生律法”的中立三、六度音程与五度相生大三度和大六度之间的跃迁算子。

中立三度与五度相生大三度之间的跃迁算子为：

$$\frac{32}{39} \div \frac{64}{81} = \frac{32}{39} \times \frac{81}{64} = \frac{27}{26}$$

中立六度与五度相生大六度

$$\frac{8}{13} \div \frac{16}{27} = \frac{8}{13} \times \frac{27}{16} = \frac{27}{26}$$

由此得知，“13 分生律法”的跃迁算子为“$\times\frac{27}{26}$”

（3）“11 分 11 倍生律”和“13 分 13 倍生律”的编制规范

从前边已经提到的“三分三倍”、“五分五倍”、“七分七倍”在旋律学和和声学方面的功能性内核，“11 倍生律”和“13 分生律”也同样可以两元生成，再来讨论“11 分 11 倍生律”和“13 分 13 倍”生律就不难理解了。质数“11”生律的编制规范是以主音上下方中立三度为典型特征，原音系网上的每个律位都可以通过跃迁算子“$\times\frac{8}{11}$”、“$\times\frac{11}{8}$”直接生出新的律位，建立起一个“11 分 11 倍生律”的音系网；同样，质数“13”生律的编制规范是以主音上下方中立三度为典型特征，原音系网上的每个律位都可以通过跃迁算子“$\times\frac{16}{13}$”、“$\times\frac{13}{16}$”直接生出新的律位，建立起一个“13 分 13 倍生律”的音系网。

对于 11、13 这种质数所构成的音阶，十二平均律也没有能力来模仿，需要二十四平均律才能对之模仿。

可知中立三度$\frac{32}{39}$的音程值为：1.02 全音 +0.6929 全音 =1.7129 全音 =342.58 音分

纯五度 + 中立二度 = 中立六度

$$\frac{2}{3} \times \frac{12}{13} = \frac{8}{13}$$

中立六度$\frac{8}{13}$的音程值为：3.51 全音 +0.6929 全音 =4.2029 全音 =840.58 音分

同理，我们也可以求出"13 分生律法"的中立三、六度音程与五度相生大三度和大六度之间的灰色算子。

中立三度与五度相生大三度之间的灰色算子为：

$$\frac{32}{39} \div \frac{64}{81} = \frac{32}{39} \times \frac{81}{64} = \frac{27}{26}$$

中立六度与五度相生大六度

$$\frac{8}{13} \div \frac{16}{27} = \frac{8}{13} \times \frac{27}{16} = \frac{27}{26}$$

由此得知，"13 分生律法"的灰色算子为"$\times\frac{27}{26}$"

（3）"11 分 11 倍生律"和"13 分 13 倍生律"的编制规范

从前边已经提到的"三分三倍"、"五分五倍"、"七分七倍"在旋律学和和声学方面的功能性内核，"11 倍生律"和"13 分生律"也同样可以两元生成，再来讨论"11 分 11 倍生律"和"13 分 13 倍"生律就不难理解了。质数"11"生律的编制规范是以主音上下方中立三度为典型特征，原音系网上的每个律位都可以通过灰色算子"$\times\frac{8}{11}$"、"$\times\frac{11}{8}$"直接生出新的律位，建立起一个"11 分 11 倍生律"的音系网；同样，质数"13"生律的编制规范是以主音上下方中立三度为典型特征，原音系网上的每个律位都可以通过灰色算子"$\times\frac{16}{13}$"、"$\times\frac{13}{16}$"直接生出新的律位，建立起一个"13 分 13 倍生律"的音系网。

对于 11，13 这种质数所构成的音阶，十二平均律也没有能力来模仿，需要二十四平均律才能对之模仿。

下　编

律学研究历史的发展与回顾

第一章　中国最早的律学实践与记载

律学是人类对音律之间自然关系的规律性认识的学问。由于地理地域的不同，生活环境和物质材料获得的不同，人们发现音律规律的途径也各有差异。人类对音律规律的认识能力所代表的知识水平，呈现着历时性的发展进步，每一个民族在律学学科上的一个新发明或新发现，都是这个科学领域里相继而来的智慧结晶。

第一节《管子·地员篇》——三分损益法的最早记录

在中国，三分损益律——五度相生律（三分三倍律）有着漫长悠久的历史。中国古代最早有关音律的记载是《管子·地员篇》（约公元前4世纪，管子本人的生活年代约为公元前730～前645年）。

凡将起五音，凡首，先主一而三之。四开以合九九，以是生黄钟小素之首以成宫。三分而益之以一，为百有八，为徵，不无有三分而去其乘，适足，以是生商，有三分而复于其所，以是成羽，有三分去其乘，适足，以是成角。①

这段记写于公元前4世纪的文字，里边包含的信息非常丰富，我们用律学的语言来解读这段文字：

宫	黄钟小素之首	1×3^4	$=81\quad=3^4$	
徵	三分益一	$81\times\frac{4}{3}$	$=108=3^3\times2^2$	（上生）
商	三分损一	$108\times\frac{2}{3}$	$=72\quad=3^2\times2^3$	（下生）
羽	三分益一	$72\times\frac{4}{3}$	$=96\quad=3^1\times2^5$	（上生）
角	三分损一	$96\times\frac{2}{3}$	$=64\quad=2^6$	（下生）

按音阶顺序排列：

徵	羽	宫	商	角
108	96	81	72	64

① 《管子》第321页。《管子集校》第909－910页，郭沫若、闻一多、许维遹撰，科学出版社1956年3月第1版。

表 18

生律顺序	1	3	0	2	4
传统阶名	徵	羽	宫	商	角
律　　数	108	96	81	72	64
相对波长	$\frac{4}{3}$	$\frac{32}{27}$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$

音程系数	$\frac{9}{8}$	$\frac{32}{27}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
音程值	大全音	五度相生的小三度	大全音	大全音

在这个音阶中，已经形成五度相生律（三分损益律）大、小三度，大六度以及大全音，主音下方的纯四度（下徵）以纯五度的低八度表述而符合三分损益法则。

古代文献《国语·周语下》（公元前 6 世纪）最早已经记载了全部十二律律名，而曾侯乙编钟的出土，也说明了先秦十二律的存在事实，为什么《管子·地员篇》只算了五个音？已有的研究成果认为《管子》“五音”是与琴有关的历史文献，因为这五音的关系正合古琴“正调”①。但作为传统律学理论文献，我们首先应该解释清楚纯粹律学内涵的理由，为什么只算了五个音。毋庸置疑，这个文献的重要价值在于：

（1）首次以三分损益法生五音；而且这个表述清晰的相生逻辑形成了最基本的五声调式结构。

（2）所有律数呈整数关系。这种有理数的整数比关系是符合自然法则的。以 3 底 4 次幂（$3^4=81$）为出发律，第 4 次生出“角”音，其律数（64）不能再继续三分，这显示出古代保持整数的算术技巧。

第二节　曾侯乙编钟铭文

中国古代虽然没有专门的纯律理论，但在传统乐器古琴的演奏及其大量有关文献中却包含着纯律的实践和理论，琴上三徽、六徽、八徽、十一徽、十二徽的按音及三、六、八、十一徽的泛音都能产生纯律音程，调弦法理论中也反映了纯律的运用。但由于琴律的记述年代较晚，对中国传统理论没有太大的影响，也没能形成系统的纯律理论。而 70 年代末出土的曾侯乙编钟让我们看到在当时已经存在的纯律实践。曾侯乙编钟铭文反映出了古代钟律的基本规定。

---

① 详见崔宪《曾侯乙编钟铭文校释及其律学研究》之下编，“《管子》五音与琴的正调”一节，第 160 页。以下简称“崔书”。

一、编钟铭文记录了早期弦律的应用实践

曾侯乙编钟（公元前433年入葬，公元1978年出土）的发现使讼争已久的"先秦编钟双音结构"得到实物确证，并由此得到中国音乐早有三度生律的传统之结论。根据编钟铭文研究得知钟律生律法以"颠曾体系"为原则。① 这是一个以四基、四颠、四曾为结构逻辑的律制体系，形成一个律位有不同律高的事实，测音数据也证实了这一点。具体而言，即乐音以旋律音程先后相继而生时，呈现出三分、三倍的五度相生关系，而当乐音以和声音程同时而生时，如同先秦编钟同体双音的协和关系，是来自五分、五倍生律关系，这就构成了包含着"三分三倍"和"五分五倍"两种生律法的音系。

"四基"——宫、商、徵、羽四个基本音级构成全部律学体制的基础。它们分别相当于琴的正调定弦中的四个散声，与管子五音的前四声保持一脉，体现出三分生律关系，它的反生方向的延伸则为三倍生律关系。

"四颠"（四角）四音处于"四基"四音上方纯律大三度，与基列各音为五分生律关系，在四基各音名后添加缀词"颠（角）"②。"颠（角）"在铭文中的地位是比较突出的，前后分别出现过"索宫之颠"（长枚中·3左鼓）、"兽钟之羽颠下角"（长枚低·4右鼓部）、"无射之徵颠"（长枚低·3右鼓部）、"新钟之商颠"（短枚中·8）和"姑洗之商角，嬴孠之宫"等等。测音数据也表明了"颠"有基音上方纯律大三度的结构意义。

"四曾"四音处于"四基"四音下方纯律大三度，与基列各音为五倍生律关系，在四基各音名后添加缀词"曾"。铭文中分别出现"姑洗之宫曾"（无枚中·2右鼓部）、"姑洗之商曾"（长枚低·9右鼓部）、"姑洗之徵曾"（长枚低·6右鼓部）、"剌音之羽曾"（长枚中·3左鼓）等等。但关于带"曾"这个缀词的音，测音数据表明有五度相生三度和纯律三度的同律位不同音高的情况，所以对"曾"的意义还有一种观点，认为"曾"既有五倍三度生律性质，又有三倍反生方向生律的性质。而且从测音数据反映出来的规律性基本上呈以"曾"为缀词的音位，与基链为大三度关系时多呈五度相生大三度，为小三度关系时多呈纯律小三度。

曾侯乙钟的音列正是"颠曾体系"的完备模式。"颠曾体系"以弦律为根本，关于这一点，黄翔鹏先生对同室出土的"均钟"之破解是最重要的辅助研究，③ 对于"管律"、"弦律"之争做出以实物为基础的论证。文中主要观点为：均钟是专为调钟的律准，先秦编钟一钟双音的结构要求每钟必严守三度同体谐和的关系，故钟律与三分损益律之间有的吻合，有的不吻合；均钟定弦法与《管子》五音之序相同，为古代乐律学理论中的下徵调

① 黄翔鹏在《曾侯乙钟磬铭文乐学体系初探》提出这个概念。

② "颠"与"角"二字意义相近，而有微小差异。参见崔书第150页。

③ 详见黄翔鹏《均钟考》中的论述。

“均法”，与古琴正调定弦法相同。

由于“颠曾体系”是以弦律为根本，其律制的性质就有着多重性，除了以上提到的兼含三分、三倍生律因素和五分、五倍生律因素，还提供了更深层的数理领域。虽然我们直到20世纪80年代才真正了解到这一律学理论与应用方面的遗产，但作为一门学科知识的认识水平和应用水平，则是早在公元前5世纪就已经达到了极高的程度。

二、铭文内容的律学表达

现在我们将1978年曾侯乙编钟出土以来，古文字学家和音乐学家们的研究成果进行整合表述。

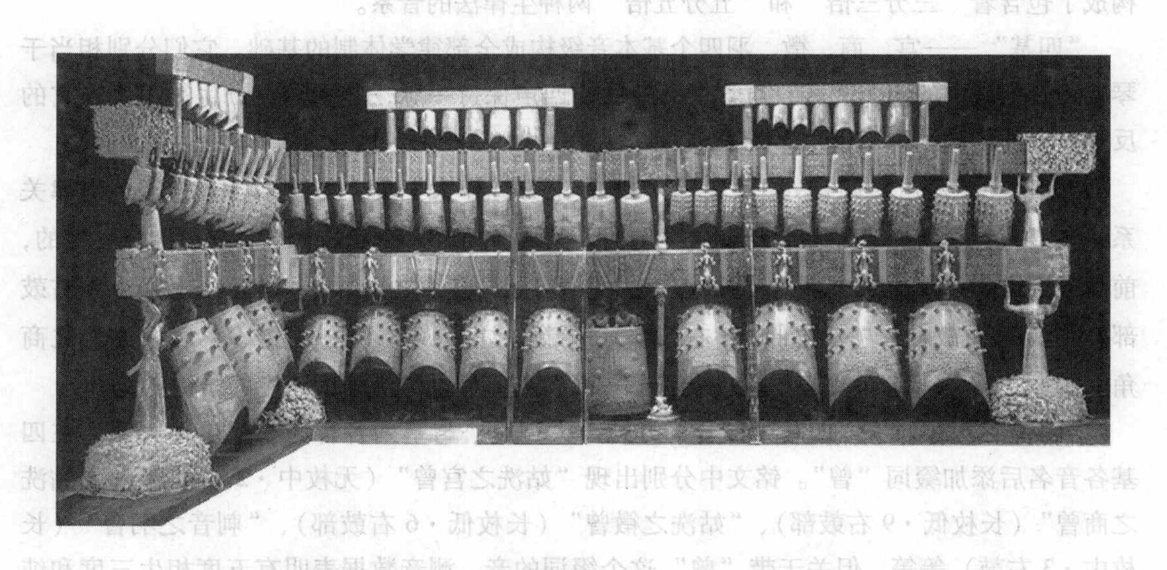


图6　曾侯乙编钟

整个编钟呈曲尺状排列，下层分三组，图左为下一层一组共3枚，中间为下一层二组共6枚，右侧为下一层三组共4枚。中层一组共11枚，中层二组共12枚，中层三组共10枚。最上一层也分三组，上层一组共6枚，二组共6枚，三组共7枚。

1. 基列——基链

长枚倍·2（下一层一组第1枚）铭文：“兽钟之渻钔，穆钟之渻商，姑洗之渻宫，浊新钟之徵。”①（见表19中第三列，姑洗钟，音名为c。）

又见长枚低·6（下一层二组第5枚）铭文：“姑洗之宫，姑洗之在楚号为吕钟。”根据裘锡圭释文，此钟为姑洗律，低音宫，穆钟上方五度相生大二度；浊新钟上方纯五度；兽钟上方五度相生大三度。

① 参见“崔书”第29、224页，根据测音姑洗律音高定为C；钔意为低音角。

长枚低·3（下一层二组第8枚）铭文："姑洗之徵。太簇之羽，新钟之变商，蕤宾之羽曾，黄钟之徵角，韦音之徵曾，宣钟之珈徵。"根据裘锡圭释文，可知此钟为姑洗上方纯五度；太簇上方五度相生大六度（见表19中第五列，浊兽钟，音名为g。）

又见短枚中·3（中层一组第9枚）铭文："姑洗之徵。穆钟之羽，新钟之羽颟，浊兽钟之宫。"这段说得很清楚，"浊兽钟"为宫的那音，是姑洗的上方纯五度；穆钟上方五度相生大六度。又根据"坪皇之宫……浊兽钟之徵"、"文王之宫……浊兽钟之羽"之言，故而判断，此钟即浊兽钟。

长枚低·1（下一层二组第10枚）铭文："坪皇之宫，姑洗之渚商，穆钟之角，新钟之宫曾，浊兽钟之徵。"另见长枚倍·3（下一层一组第2枚）铭文。根据裘锡圭释文，可知坪皇钟为蕤宾律，① 为姑洗上方大全音，浊兽钟上方纯五度。（见表19中第六列，坪皇钟，音名为d。）

长枚低·4（下一层二组第7枚）铭文："姑洗之羽。夷则之徵，新钟之徵曾，应音之变商，韦音之羽曾。"这段话表明了这样的关系：此钟为姑洗上方五度相生大六度那音。（见表19中第七列，浊穆钟，音名为a。）

长枚低·2（下一层二组第9枚）铭文："文王之宫，坪皇之商，姑洗之䤨，新钟之商曾，浊兽钟之羽。"根据裘锡圭释文，可知文王钟是坪皇钟上方大全音；姑洗（吕钟）上方五度相生大三度；浊兽钟上方五度相生大六度。新钟下方三度相生大二度（即小全音）。又根据短枚中·3（中层一组第9枚）左鼓背面铭文："文王之终，新钟之羽曾，浊穆钟之商，浊姑洗之宫。"得知浊姑洗是文王之徵②，浊穆钟之商；因而可以判断长枚低·4钟正鼓音，即姑洗之羽为浊穆钟。（见表19中第八列，文王钟，音名为e。）

无枚中·5（中层二组第8枚）右鼓铭文："文王之羽，新钟之徵，浊坪皇之宫。"又见短枚中·4（中层一组第8枚）右鼓铭文。这里表明，文王上方五度大六度那音为浊坪皇，为右鼓音。（见表19中右一列，浊坪皇钟，音名为$^{\#}c$。）

将以上铭文的内容排列起来，以姑洗为宫，其他各音与姑洗形成如下五度链关系：

穆钟←浊新钟←姑洗→浊兽钟→坪皇钟→浊穆钟→文王钟→浊姑洗→无射→浊坪皇

中间四基之音的铭文非常清楚地表明了姑洗均的宫、徵、商、羽四音，姑洗以左浊新钟、穆钟和浊穆钟以右各音的逻辑演绎关系。

① 转引自"崔书"第31、225页C·65·下·一·2［正］："妥（蕤）宾之才（在）楚号为坪皇"。
② "终"为高八度"徵"的异名。见崔书第91页注释。

表 19①

古代律名		穆音(曾) 穆钟(楚) 槃钟(晋)	浊新钟(楚)	姑洗(曾、楚) 吕钟(楚)	浊兽钟(楚)	蕤宾(曾) 坪皇(楚) 夷则(申)	浊穆钟(楚)	文王(楚)	浊姑洗(楚、曾)	无射(曾)	(浊坪皇)
校正值		-.02	-.01		+.01	+.02	+.03	+.04	+.05	+.06	+.07
相对波长②	小字二组	$\frac{9}{128}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{16}{243}$	$\frac{64}{729}$	$\frac{256}{2187}$
	小字一组	$\frac{9}{64}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{243}$	$\frac{128}{729}$	$\frac{512}{2187}$
	小字组	$\frac{9}{32}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{64}{243}$	$\frac{256}{729}$	$\frac{1024}{2187}$
	大字组	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2048}{2187}$

2. 一次低列——阳链

根据乐音在调式组织结构方面所体现出的色彩性，运用中国传统哲学中的阴阳观念，对下列这类色彩性音列表述为阳链。

长枚中·5（中三层第6枚）铭文："姑洗之宫角。韦音之宫。……"③ 又见长枚低·8（下一层二组第3枚）铭文："韦音之宫。韦音之在楚号为文王。夷则之商，为刺音变徵。"左鼓正面铭文："应音之宫。应音之在楚为兽钟，其在周为应音。"④ 此铭文说明韦音为姑洗上方大三度。（见表20中第四列，韦音，音名为e。）

长枚低·9（下一层二组第2枚）铭文："姑洗之商角。赢孠之宫。赢孠之在楚为新钟，其在齐为吕音。"⑤ 此铭文说明赢孠为姑洗之商的上方大三度。（见表20中第六列，新钟，音名为$^{\#}f$。）

长枚低·2（下一层二组第9枚）右鼓铭文："兽钟之宫，新钟之清商，浊姑洗之羽。"⑥ 此铭文说明兽钟与新钟和浊姑洗的关系，兽钟之宫为右鼓音。

---

① 表中第一行参见崔书第25页"曾侯乙编钟各国律名音分值一览表"之基列。

② 赵宋光在一篇未发表的文章《探寻曾侯乙编钟音系的数理结构》（2001年提交第四届律学研讨会）中将崔宪梳理出的一览表中的音系关系用相对波长作进一步的律学表述。

③ 参见"崔书"第68、242页C·65·中·三·6［反］。

④ 同③第53、227页C·65·下·二·3［正］。

⑤ 同③第55、226页C·65·下·二·2［正］(1)。

⑥ 同③第85、234页C·65·中·一·10［反］。

长枚中·9（中三层第2枚）铭文：“太簇之在周号为剌音，其在晋号为槃钟。”① 这两段铭文说明这几音之间的五度链关系。（见表20中右三列，兽钟，音名为$^{\sharp}$g；右一列，槃钟，音名为$^{\sharp}$a，与基链中的穆钟为同律位。）

长枚低·4（下层二组第7枚）铭文：“姑洗之羽角，为文王羽，为坪皇徵角，为兽钟之羽颠下角。”② 此钟为姑洗之羽的上方大三度；文王上方大六度；坪皇之徵的上方大三度。（见表20中右四列，音名为$^{\sharp}$c，与浊坪皇为同律位。）

长枚倍·2（下一层一组第1枚）右鼓铭文：“兽钟之清徵，浊坪皇之商，浊文王之宫，浊姑洗之下角。”又见无枚中·6（中层二组第7枚）右鼓铭文：“新钟之羽，浊坪皇之商，浊文王之宫。”又见短枚中·5（中层一组第7枚）右鼓铭文。③ 这几段铭文说明浊文王为宫，与兽钟、新钟、浊坪皇的音程关系。（见表20中右二列，音名为$^{\sharp}$d。）

韦音——姑洗之宫角（长枚中·5正鼓音），其测音数据（384音分）与姑洗构成一个纯律大三度，以上铭文展示出了各音的逻辑关系，韦音的测音数据可以转换为相对波长，其他各音的相对波长根据五度链的相生关系推演排列如下。④

表20

古代律名				韦音（曾、周）文王（楚）		嬴孠（曾、周）新钟（楚）	（浊坪皇）	应音（周）应钟（曾）兽钟（楚）	（浊文王）	（槃钟）（太簇）（剌音）
校正值		-.09	-.08	-.07	-.06	-.05	-.04	-.03	-.02	-.01
相对波长	小字二组	$\frac{9}{80}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{16}{135}$	$\frac{32}{405}$	$\frac{128}{1215}$	$\frac{256}{3645}$
	小字一组	$\frac{9}{40}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{32}{135}$	$\frac{64}{405}$	$\frac{256}{1215}$	$\frac{512}{3645}$
	小字组	$\frac{9}{20}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{64}{135}$	$\frac{128}{405}$	$\frac{512}{1215}$	$\frac{1024}{3645}$
	大字组	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{128}{135}$	$\frac{256}{405}$	$\frac{1024}{1215}$	$\frac{2048}{3645}$

3. 一次高列——阴链

根据乐音在调式组织结构方面所体现出的色彩性，运用中国传统哲学中的阴阳观念，

① 参见“崔书”第78、240页C·65·中·三·2［反］（3）。

② 同①书第43、229页C·65·下·二·7［正］（4）。

③ 同①第28、92、115、224页C·65·下·一·1［正］（4）；237页C·65·中·二·7［反］（3）；233页C·65·中·一·7［反］（3）。

④ 此数据见“崔书”第206页“长枚中·5”之正鼓音。

对下列这类色彩性音列表述为阴链。

长枚低·2（下层二组第9枚）左鼓铭文："文王之渚钔，新钟之商，姑洗之宫曾，浊坪皇之徵。"① 此段铭文意为姑洗之宫曾那音，也是新钟之商，浊坪皇之徵等等，而该钟右鼓铭文又有"兽钟之宫，新钟之渚商"一句，因而可以判断出姑洗之宫曾那音正是兽钟。（见表21中第五列，音名为$^{\flat}$a。）

长枚低·5（下层一组第3枚）右鼓铭文："姑洗之徵曾，为黄钟徵，为坪皇变商，为夷则羽角。"② 此段铭文意为姑洗之徵曾那音，也是黄钟之徵。参照长枚倍·2右鼓铭文"兽钟之渚徵……浊文王之宫"一句，可知姑洗之徵曾就是浊文王那音。（见表21中第六列，音名为$^{\flat}$e。）

长枚低·9（下层二组第2枚）右鼓铭文："姑洗之商曾。穆音之宫。穆音之在楚为穆钟。其在周为剌音。"③ 此段铭文意为姑洗之商曾那音，正是"穆钟"。（见表21中右五列，音名为$^{\flat}$b。）

长枚低·1（下层二组第10枚）右鼓铭文："兽钟之羽，穆钟之徵，姑洗之羽曾，浊新钟之宫。"④ 此段铭文意为兽钟之羽的那音为姑洗之羽曾，名为"浊新钟"。（见表21中右四列，音名为f。）

长枚低·6（下层二组第5枚）正鼓铭文："姑洗之宫，姑洗之在楚号为吕钟，其反为宣钟，宣钟之在晋号为六墉。太簇之商，黄钟之钔，蕤宾之商曾。"另见长枚中·6（中层三组第5枚）右鼓铭文："姑洗之宫居，姑洗之在楚号为吕钟，其反为宣钟。"⑤ 此段铭文意为姑洗之高八度为宣钟。测音数据表明"宫居"比吕钟（姑洗）高一个普通音差。（见表21中右三列，宣钟，音名为c。）

长枚倍·2（下层一组第1枚）右鼓铭文："兽钟之渚徵，浊坪皇之商，浊文王之宫，浊姑洗之下角。"左鼓铭文："新钟之渚羽，浊坪皇之渚商，浊文王之渚宫。"⑥ 这段铭文说明各音之间的逻辑关系。

兽钟——姑洗之宫曾（长枚低·2）与姑洗构成一个纯律小六度（测音数据偏低），以上铭文展示出了各音的逻辑关系，兽钟的测音数据可以转换为相对波长，其他各音的相对波长根据五度链的相生关系推演排列如下。⑦

① 参见"崔书"第38、230页C·65·中·三·2［正］(4)。

② 同①第46、225页C·65·下·一·3［正］(3)。

③ 同①第55、226页C·65·下·二·2［正］(3)。

④ 同①第35、230页C·65·下·二·10［正］(3)。

⑤ 同①第48、72、228页C·65·下·二·5［正］(1)、241页C·65·中·三·5［反］(3)。

⑥ 同①第28、224页C·65·下·一·3［正］(3)、(4)。

⑦ 测音数据见"崔书"第202页"长枚低·2"之右鼓音。

表 21

古代律名		（浊姑洗）	（新钟）	浊坪皇（楚）	黄钟（曾）兽钟（楚）	浊文王（楚）	太簇（曾）穆钟（楚）剌音（周）	（浊新钟）	宣钟（曾、周）六墉（晋）		
校正值		+.04	+.05	+.06	+.07	+.08	+.09	+.10	+.11	+.12	+.13
相对波长	小字二组	$\frac{135}{2048}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{5}{64}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{5}{54}$	$\frac{10}{81}$	$\frac{20}{243}$	$\frac{80}{729}$
	小字一组	$\frac{135}{1024}$	$\frac{45}{256}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{20}{81}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{160}{729}$
	小字组	$\frac{135}{512}$	$\frac{45}{128}$	$\frac{15}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{10}{27}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{320}{729}$
	大字组	$\frac{135}{256}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{80}{81}$	$\frac{160}{243}$	$\frac{640}{729}$

根据姑洗－韦音（姑洗之宫角）－兽钟（姑洗之宫曾）这三音所统领的三个五度链之间的关系，可以将这三个音列整合为一个音系网：

−09	−08	−07	−06	−05	−04	−03	−02	−01
D	A	E	B	♯F	♯C	♯G	♯D	♯A
$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{128}{135}$	$\frac{256}{405}$	$\frac{1024}{1215}$	$\frac{2048}{3645}$
		韦音		新钟		应音		槃钟

−02	−01	0	+01	+02	+03	+04	+05	+06	+07
♭B	F	C	G	D	A	E	B	♯F	♯C
$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2048}{2187}$
穆钟	浊新钟	姑洗	浊兽钟	坪皇	浊穆钟	文王	浊姑洗	无射	浊坪

+04	+05	+06	+07	+08	+09	+10	+11
♭C	♭G	♭D	♭A	♭E	♭B	F	C
$\frac{135}{256}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{80}{81}$
浊姑洗	新钟	浊坪皇	兽钟	浊文钟	太簇		宣钟

图 7　曾侯乙编钟铭文音系网

第三节《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》
——十二律相生而出的最早记录

继《管子·地员篇》之后，《吕氏春秋·季夏纪·音律篇》（公元前 3 世纪）用三分损益法将五律增加到十二律，使调式可以在十二律上进行旋宫，构成各种调高。

黄钟生林钟，林钟生太簇，太簇生南吕，南吕生姑洗，姑洗生应钟，应钟生蕤宾，蕤宾生大吕，大吕生夷则，夷则生夹钟，夹钟生无射，无射生仲吕。三分所生，益之一分以上生；三分所生，去其一分以下生。黄钟、大吕、太簇、夹钟、姑洗、仲吕、蕤宾为上，林钟、夷则、南吕、无射、应钟为下。①

这段文字提供的信息非常明确，交待了相生原则是三分益一为上生，三分损一为下生，某些律为上生，某些律为下生，用律学的语言来解读这段文字：

表 22

生律序号	借用现代唱名	律吕名	三分损益次第相生		生律方向	质底幂积式
0	Do	黄钟	1			$=2^0\cdot3^0$
1	So	林钟	1	$\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$	下生	$=2^1\cdot3^{-1}$
2	Rai	太簇	$\frac{2}{3}$	$\times\frac{4}{3}=\frac{8}{9}$	上生	$=2^3\cdot3^{-2}$
3	La	南吕	$\frac{8}{9}$	$\times\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$	下生	$=2^4\cdot3^{-3}$
4	Mi	姑洗	$\frac{16}{27}$	$\times\frac{4}{3}=\frac{64}{81}$	上生	$=2^6\cdot3^{-4}$
5	Ti	应钟	$\frac{64}{81}$	$\times\frac{2}{3}=\frac{128}{243}$	下生	$=2^7\cdot3^{-5}$
6	#Fa	蕤宾	$\frac{128}{243}$	$\times\frac{4}{3}=\frac{512}{729}$	上生	$=2^9\cdot3^{-6}$
7	#Do	大吕	$\frac{512}{729}$	$\times\frac{4}{3}=\frac{2048}{2187}$	上生	$=2^{11}\cdot3^{-7}$
8	#So	夷则	$\frac{2048}{2187}$	$\times\frac{2}{3}=\frac{4096}{6561}$	下生	$=2^{12}\cdot3^{-8}$
9	#Rai	夹钟	$\frac{4096}{6561}$	$\times\frac{4}{3}=\frac{16384}{19683}$	上生	$=2^{14}\cdot3^{-9}$
10	#La	无射	$\frac{16384}{19683}$	$\times\frac{2}{3}=\frac{32768}{59049}$	下生	$=2^{15}\cdot3^{-10}$
11	#Mi	仲吕	$\frac{32768}{59049}$	$\times\frac{4}{3}=\frac{131072}{177147}$	上生	$=2^{17}\cdot3^{-11}$

① 《吕氏春秋》第 47 页上栏。

例 6：借用五线谱记谱表示《吕氏春秋》的计算结果



这段文献的重要价值在于：

最早以三分损益法算齐了十二律。

先下生后上生以及蕤宾后重上生是其突出特点。“蕤宾重上生”可以使所得十二律保持在一个八度内，在应用律学方面，可以保持 12 支律管从黄钟到应钟依次递进，长短有序，是乐律学史上的一个重要话题。

以上采用了“质底幂积”的表达式，这样的表达还含有生律编号的意义。传统律学历来有“律序”这个概念，以黄钟为首律，林钟为第二律，太簇为第三律，……按照生律顺序，依次排列。但黄钟作为出发律，还没有参与相生，所以将其编为 0 号，以下各律从 1 开始，按生律顺序编号，这样的生律编号正好与 3 底幂的指数相一致。所以用“质底幂积”的表达式，有助于一目了然地把握每一律的相生顺序及次数。其中质数“2”，无论 2 底幂指数怎样累积，只是做高低八度的音区移位，不会改变律位。黄钟的相对长度设为 1，可以写作“$2^0 \cdot 3^0$”。这种生律编号的意义在后来的多律探索中将发挥更重要的作用。

第二章 中国律学理论的纵深发展

第一节《淮南子》律数——自然数的开拓

在中国古代，虽然没有关于纯律音程成系统的理论，但也仍能从早期文献中看到一些纯律的痕迹。《淮南子·天文训》中有关律学的一段记载就透露出这样的信息：

……以三参物，三三如九，故黄钟之率九寸而宫音调。因而九之，九九八十一，故黄钟之数立焉。……十二各以三成，故置一而十一三之，为积分十七万七千一百四十七，黄钟大数立焉。……①

一、初立黄钟大数

这段文字表达出的主导思想仍然是建立在三分损益法基础上的。为了保持整数局面，预先设定了相生 11 次，以 3 的 11 次幂作为黄钟大数——$177147 = 3^{11}$。这是继管子律数后又一次有意识地体现保持整数的算术技巧。

若按黄钟大数 177147，以三分损益法逐次求出十二律律数，可得出如下结果：

表 23

律吕名	大数幂式	大数	管子律数出发的系列	十进制带分数	约数
黄钟	$2^0 \cdot 3^{11}$	177147	$2^0 \cdot 3^4$	81	81
林钟	$2^1 \cdot 3^{10}$	118098	$2^1 \cdot 3^3$	54	54
太簇	$2^3 \cdot 3^9$	157464	$2^3 \cdot 3^2$	72	72
南吕	$2^4 \cdot 3^8$	104976	$2^4 \cdot 3^1$	48	48
姑洗	$2^6 \cdot 3^7$	139968	$2^6 \cdot 3^0$	64	64
应钟	$2^7 \cdot 3^6$	93312	$2^7 \cdot 3^{-1}$	$42\frac{2}{3}$	43
蕤宾	$2^9 \cdot 3^5$	124416	$2^9 \cdot 3^{-2}$	$56\frac{8}{9}$	57
大吕	$2^{11} \cdot 3^4$	165888	$2^{11} \cdot 3^{-3}$	$75\frac{23}{27}$	76
夷则	$2^{12} \cdot 3^3$	110592	$2^{12} \cdot 3^{-4}$	$50\frac{46}{81}$	51
夹钟	$2^{14} \cdot 3^2$	147456	$2^{14} \cdot 3^{-5}$	$67\frac{103}{243}$	67
无射	$2^{15} \cdot 3^1$	98304	$2^{15} \cdot 3^{-6}$	$44\frac{692}{729}$	45
仲吕	$2^{17} \cdot 3^0$	131072	$2^{17} \cdot 3^{-7}$	$59\frac{2039}{2187}$	60

① 《淮南子·卷三·天文训》，《诸子集成》第 7 卷第 35 页。

二、寻找等差数列

《淮南子》给出黄钟大数后，却又有一段话令历代乐律学家困惑不已：

……黄钟为宫，宫者，音之君也。故黄钟位子，其数八十一，主十一月，下生林钟；林钟之数五十四，主六月，上生太簇；太簇七十二，主正月，下生南吕；南吕之数四十八，主八月，上生姑洗；姑洗之数六十四，主三月，下生应钟，应钟之数四十二，主十月，上生蕤宾。蕤宾之数五十七，主五月，上生大吕。大吕之数七十六，主十二月，下生夷则，夷则之数五十一，主七月，上生夹钟。夹钟之数六十八，主二月，下生无射。无射之数四十五，主九月，上生仲吕。仲吕之数六十，主四月，极不生。徵生宫，宫生商，商生羽，羽生角，角生姑洗，姑洗生应钟，比于正音，故为和。应钟生蕤宾，不比正音，故为缪。

我们先将这组律数顺序排列：

十一月	十二月	正月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥	子	丑
黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	黄钟	大吕
81	76	72	68	64	60	57	54	51	48	45	42		
						（缪）					（和）		
			↑								↑		
			67.423868								42.6666667		

从表23能见到，若以81为始发律数，三分损益法求各律，只有前五律（黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗）可以得到整数，其他都是带分数，《淮南子》律数将所有的带分数进行四舍五入，得出约数，从而简化了十二律之间的关系，呈现出不复杂整数的自然化局面，这是符合人类听觉审美要求的。令人不解的是，其他约数都合四舍五入的规律，只有应钟、夹钟两律却该入反舍，该舍反入，形成了如上所述的整数数列。

"四舍五入"是面对小数的形式所遵循的一种操作规则，古代不用小数形式而用带分数形式，此操作规则应表述为：所带的分数小于$\frac{1}{2}$则舍，大于$\frac{1}{2}$就入，如表中最后一栏的"约数"。但"淮南律数"中应钟、夹钟两数却没按此规则，什么原因呢？

用律学的语言来解读这段文字，如果分段审视这些律数，我们将发现如下几种情况。

情况一：大吕至仲吕这五项律数，依次相差4，且这5项都含因数4，可把4作为公因数提取出去，从而揭示出，实际上这5项构成了更为简单的整数等差数列；倘若夹钟律数用67而不调整为68，这段结构的等差趋匀性就被破坏了。仲吕至应钟这7项律数，依次相

差 3，且这 7 项都含因数 3，可把 3 作为公因数提取出去，从而同样也揭示出，实际上这 7 项构成了更为简单的整数等差数列；倘若应钟律数用 43 而不调整为 42，它就不能参与被提取公因数的行列，这段等差数列就截短为 6 项。

表 24

律吕名称	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
律数	81	76	72	68	64	60	57	54	51	48	45	42
律数差	5	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	
5 项提公因 4	4 ×（	19 ：	18 ：	17 ：	16 ：	15）						
7 项提公因 3					3 ×（	20 ：	19 ：	18 ：	17 ：	16 ：	15 ：	14）

观察提去公因数之后显露的数列，可见到，两段数列的结构有很高程度的一致性，5 项数列的数理结构能完完整整地被包含在 7 项数列的数理结构之内。倘若夹钟律数用 67 而不调整为 68，结构的逻辑贯通性就丧失了，结构的美也就受了伤害。这更进一步表明，夹钟律数的调整是十分必要的。至于应钟律数的调整带来更多的裨益，下文将予以揭示。

可见，违反四舍五入规则的律数调整有维护简单整数等差数列、增强逻辑贯通性、提高结构美的作用。至于《淮南子》作者是否意识到这些目标而有意为之，尚有待探究。

三、淮南律数内涵的乐律学能量

情况二：仲吕、无射两项律数都含因数 5，那也就是说，这两律跟另外某些律之间存在着能以“五分五倍生律法”互相联结的关系，亦即纯律三、六度关系。这就告诉我们，当《淮南子》对律数取了约数以后，在某些场合就遇到了纯律音程。虽然我们不宜猜测，该古籍作者有意要探索纯律，但我们可以断言，由于作者有意从大数转到约数，律学固有的数理就必然使某几处约数含有因数 5，因而遭遇纯律三、六度音程。不管作者是否意识到这一后果，纯律三、六度音程的实际萌生毕竟是逻辑的必然。

具体说来，这里萌生了哪些纯律三、六度音程呢？应该是无射与林钟、无射与太簇、仲吕与太簇、仲吕与南吕。

表 25

律吕名称	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射
借用记谱									
律数	72			60		54		48	45
9 ×	（8					6			5）
12 ×	（6			5				4）	
360 ×	（$\frac{1}{5}$			$\frac{1}{6}$					$\frac{1}{8}$）

在此能发现 3 个纯律的三和弦。为便于想像与理解，我们借用 d 小调的观念，设太簇对应于 D。提取公因 9 的那行，可想像为 g（d 小调下属和弦）第二转位。提取公因 12 的那行，可以想像为 d（d 小调主和弦）原位。提取公因 360 而显示分数单位连比式的那行，可以想象为 $^{\flat}$B（d 小调Ⅵ级和弦）第一转位。

情况三：应钟律数含因数 7，它是 12 项律数中惟一含 7 的一项。它跟某些律能结合成半减七和弦的第一转位。

在此先回忆前文曾提及的有关属七和弦与Ⅱ级七和弦的知识。[①] 波长连比式呈现为 7 : 6 : 5 : 4 的 4 个音律所构成的和弦形式，恰恰是谐音列第 4 至 7 号音（波长连比式呈现为 $\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}:\frac{1}{7}$）所构成和弦的倒映形式。查谐音列结构可知，第 4 至 7 号谐音构成属七和弦（4 号与 7 号，根音与七音，相距“自然七度”）。它的倒映形式就是半减七和弦。大家知道，自然小调Ⅱ级七和弦正是半减七和弦，例如 a 小调的Ⅱ级七和弦由 $b\ d^1\ f^1\ a^1$ 构成。在此，根音与七音，7 倍波与 4 倍波，同样相距“自然七度”。当这和弦作第一转位时，波长连比式呈现为什么样式呢？

原　位　　7 : 6 : 5 : 4

第一转位　　6 : 5 : 4 : $\frac{7}{2}$

= 12 : 10 : 8 : 7

《淮南子》所述的太簇、仲吕、南吕、应钟 4 项律数，恰能构成这一形式。我们借用“a 小调的Ⅱ级七和弦的第一转位”这一观念，很容易想像并理解。

表 26

律吕名称	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
借用记谱										
律数	72			60				48		42
6 ×	（12			10				8		7）

倘若应钟律数用 43 而不调整为 42，这样顺乎自然的结构就不可能建立了。

情况四：夹钟、夷则两项律数，都含因数 17。在律数里出现这种因数，不仅超越了琴律所涉及的所有生律法（五分五倍生律法、七倍生律法）。与欧洲的和声学、律学研究进程相比，这律数也是大大超前的。公元 1 世纪时，古希腊著名数学家、天文学家托勒密在《谐和论》(Harmonica) 中也提到了 18 : 17，并被 9 世纪时阿拉伯学者法拉比描述为半音。欧洲近代曾经有过用律学方法建设和声学基础理论的辉煌时期，但 17 这个质数却从未在和声学理论研究中出现，至今还不能发现它的踪影。在中国当代和声学论著中，关于质数 17

① 参见第 34 – 35 页。

的论述出现于20世纪70年代末至80年代初。① 而在我国古代律学典籍中，竟于公元前的西汉就出现了这个因数，为今天的律学、和声学研究准备好了材料。

含质数17的律数有什么样的可能参与和弦构成呢？若把上表内的南吕（48）换成夷则（51），将得到一个波长连比例并不复杂的减七和弦的第二转位。见到这连比式时，仍不要忘记，惟有在应钟律数为42的前提下，才可能得以约简；倘若应钟律数用43而不调整为42，这样的约简就无法进行了。

表27

律吕名称	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
借用记谱										
律数	72			60			51			42
3 ×	（24			20			17			14）

如果把这第二转位恢复到原位，将能见到：

第二转位　　24：20：17：14

原　　位　　34：28：24：20

　　　　=　　17：14：12：10

这是谐音列第10、12、14、17号四个音所构成的减七和弦的倒映形式。十二平均律对这两种互倒结构的模拟仿制，令我们难以觉察到两者的区别，使减七和弦的功能解释成为和声学理论中聚讼已久的难题。律学才是解开这一死结的理论工具。

情况五：大吕、蕤宾两项律数，都含因数19。这是又一个超前了两千年出现的律学因子。含因数19的律数有什么样的可能参与和弦构成呢？找到前表所列的d小和弦，把根音太簇（72）换成大吕（76），将得到一个增三和弦，它的波长连比例也不复杂。

表28

律吕名称	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕
借用记谱										
律数		76				60				48
4 ×		（19				15				12）

① 赵宋光，《关于减七、增六和弦的功能的争议》，参加1979年第一届全国和声学学术报告会论文，见《和声学学术报告会》论文汇编，湖北艺术学院（现武汉音乐学院）和声学学术报告会办公室编，1979年10月，第372－389页。《数在音乐表现手段中的意义》，《美学》第五辑第179－199页，1983年出版。

这是谐音列第12、15、19号三个音所构成的增三和弦的倒映形式。这结构涉及和声学理论中增三和弦功能解释的难题。淮南律数的启示正在推动当代中国学者用律学方法解开它。①

四、淮南律数的历史意义与思想价值

淮南律数反映出的律学意义有：（1）最早明确提出黄钟长度为九寸；最早以81起推算十二律相生之数；最早定出黄钟大数177147，才可以求出其他各律的整数比例；最早说出七声所应之律。（2）开辟了整数自然化的局面，简化了十二律的关系。（3）追求等差数列但不盲目强求将十二律吕全体纳入单一等差数列（因为自然法则规定了八度之间真数所构成的单一等差数列不合自然音阶）。（4）出现了纯律数据。（5）出现了超越纯律理论的律学因子。淮南律数由于朴素的跃迁而产生了超越各种传统规则的数理关系。②

虽然淮南律数最初的起始点是用三分损益法生律，但它不拘一格、灵活变通的跃迁所产生的结果却是对自然律的应和。先秦及以后的律学探索大多都是围绕三分损益法和三分损益律，淮南律数却有着新鲜生动的、对民间纯律实践的理性思维，它能够打破三分损益律的窠臼，立足于自然数，其间体现出的数理逻辑，绝不仅仅是巧合可以解释的。

以往，在任何律学讨论的著作、专论中，《淮南子》律数给我们提供的诸多可能性并没有被充分认识到。在运用现代律学分析手段剖析出淮南律数中的更多信息后，我们知道，《淮南子》律数所涉及的律制领域不仅超出了三分损益律，具有纯律因素，而且启迪了超越传统律学思维的更多的可能性。虽然在汉族音乐实践中，以往没有这样的运用，但淮南律数所体现的律制体系已经具备了解释这种音乐实践的能力。《淮南子》在趋匀观念的引导下，追求整数的自然化局面，因而朴素地产生了纯律因素和展示出音乐更深层的数理规律，这是毋庸置疑的了。淮南律数对于较复杂的和弦结构暗示了新的理解，可以为今后和声功能理论研究开辟新的领域。

第二节 《史记·生钟分》——智慧的表述体系

《史记·生钟分》（司马迁，前163～85年）中记载了一个具有极高价值的律学成果，但这一智慧结晶却鲜被注意。

> 子一分，丑三分二，寅九分八，卯二十七分十六，辰八十一分六十四，巳二百四十三分一百二十八，午七百二十九分五百一十二，未二千一百八十七分一千二十四，申六千五百六十一分四千九十六，酉一万九千六百八十三分八千一百九

---

① 在《数在音乐表现手段中的意义》一文中，第一次正式对增三和弦的来源进行理论解释。见《赵宋光文集》第二卷第76页。

② “跃迁”此处指《淮南子》律数从大数到约数的转变以及为维护等差数列所做的调整。

十二，戌五万九千四十九分三万二千七百六十八，亥十七万七千一百四十七分六万五千五百三十六。①

用律学的语言来解读这段文字：文中每一个序数可以与律吕名对应，并借用现代唱名对应传统律名，序数后的分数（“三分二”、“九分八”等）转换成表中的相对波长，并根据这些已经给定的数据分解出生律方向。

表 29

借用现代唱名	律吕名	生律序数	相对波长	生律法	交替相生	质底幂积式
Do	黄钟	子	1			$=2^0\cdot3^0$
So	林钟	丑	$\frac{2}{3}$	$1\times\frac{2}{3}$	下生	$=2^1\cdot3^{-1}$
Rai	太簇	寅	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}$	上生	$=2^3\cdot3^{-2}$
La	南吕	卯	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{9}\times\frac{2}{3}$	下生	$=2^4\cdot3^{-3}$
Mi	姑洗	辰	$\frac{64}{81}$	$\frac{16}{27}\times\frac{4}{3}$	上生	$=2^6\cdot3^{-4}$
Ti	应钟	巳	$\frac{128}{243}$	$\frac{64}{81}\times\frac{2}{3}$	下生	$=2^7\cdot3^{-5}$
$^\sharp$Fa	蕤宾	午	$\frac{512}{729}$	$\frac{128}{243}\times\frac{4}{3}$	上生	$=2^9\cdot3^{-6}$
$^\sharp$Do	大吕	未	$\frac{1024}{2187}$	$\frac{512}{729}\times\frac{2}{3}$	下生	$=2^{10}\cdot3^{-7}$
$^\sharp$So	夷则	申	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{1024}{2187}\times\frac{4}{3}$	上生	$=2^{12}\cdot3^{-8}$
$^\sharp$Rai	夹钟	酉	$\frac{8192}{19683}$	$\frac{4096}{6561}\times\frac{2}{3}$	下生	$=2^{13}\cdot3^{-9}$
$^\sharp$La	无射	戌	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{8192}{19683}\times\frac{4}{3}$	上生	$=2^{15}\cdot3^{-10}$
$^\sharp$Mi	仲吕	亥	$\frac{65536}{177147}$	$\frac{32768}{59049}\times\frac{2}{3}$	下生	$=2^{16}\cdot3^{-11}$

例 7　借用五线谱记谱表示《史记·生钟分》的计算结果



① 《史记·卷二十五·律书第三·生钟分》，《历代乐志律志校释》第 123－124 页。

这个损益相间、蕤宾后下生的生律结果必然形成超出八度的排列，参见《吕氏春秋》中的十二律位谱例。①

这段文献的重要价值在于：

把黄钟（子）的长度设为1，其他各律（丑、寅……）的长度表述为分数。这种以1为出发点，在推算中不避开非整数的表述形式，而有意识地用分母、分子的比值形式表述律数，开创了分数的表述方式。这样可以避开管、弦等粗略的物质手段的具体长度，专注于数理规定性，客观上径直指向后世才发现的波长的数理相对规定性，早在公元前2世纪就已揭示出相对波长的数理本质。然而这个重要方法却很少被人提及。② 明朱载堉对"生钟分"这节内容非常推崇；王光祈曾在他的《中国乐制发微》一文中对"生钟分"这段文字也有所关注，赞扬其"替我们把中国古代音律制度详确保存起来"，但他对这则文献在声学、律学方面所达到的高度并没有清楚的评价，而主要批评"未"项以下各律皆为半律，是颠倒误用了三分损益法。当然他也认为这只是微疵。③

《史记·生黄钟》还记录了换算黄钟振动体长度的办法："（术）曰：以下生者，倍其实，三其法。以上生法，四其实，三其法。……置一而九三之以为法，[十一三之以为实;]实如法，得长一寸；凡得九寸，命曰：黄钟之宫。"④ 这是说以$3^9=19683$那数为一寸，九寸为黄钟，9寸$\times 3^9=3^{11}=177147$，则是黄钟实数。

第三节　京房六十律的理论价值及其他

和《史记》的时间相差不远的是《淮南子》律数及京房六十律（京房，公元前77～37年）。《淮南子》律数与京房六十律体现了律学研究发展的两个不同方向，一个是向着简的方向发展，使十二律之间呈不复杂整数的自然化局面（这一点已在上文详述），这种调整已经超出了三分损益法的规则；另一个是继续严格遵循三分损益法向着繁的方向发展，即多律的研究，这就是京房的六十律→钱乐之三百六十律。

近百年来，京房六十律和钱乐之三百六十律这笔乐律学遗产，被公认为"封建糟粕"，它对数理逻辑进行理性思维的智能价值并没有得到真正充分体认。甚至在缪先生最新版的《律学》⑤ 一书中，也只是说有科学价值，可供律学研究之用，认为何承天等人的新律研究才是真正发展之路。

---

① 见第51页例6。

② 赵宋光先生1998年在扬州大学中国文化研究所作专题讲座，专门讲解《管子》、《吕氏春秋》、《史记·生钟分》及《淮南子》诸文献中的律学部分，笔者是时正访学于该所，此内容根据本人笔记整理。对淮南律数的分段分析方法也是在那次讲座中提到的。

③ 详见王光祈《中国乐制发微》，载《王光祈音乐论著选集》下册163－184：第177页

④ 引自《历代乐志律志校释》之《史记·律书·生黄钟》，第127－128页

⑤ 指缪天瑞《律学》，人民音乐出版社1996年北京第1版。

一、京房六十律的内容与方法

京房六十律自身的逻辑结构与音乐艺术日常习用的音律规定性有着数理的内在联系，这种逻辑是客观存在的，它能被音律科学的理性思维所发现，这是历史的必然，而这发现早在公元前1世纪至公元5世纪完成，在世界文化史上也属遥遥领先。这个发现所激起的“理性思维的反弹力，也曾推动何承天、朱载堉等对均匀律制的顽强不息、精益求精的探索，成为中华文化能以赢得十二平均律首创权的隐伏驱动力之一。”①

《后汉书·律历志·律术》中对京房六十律的生律记载：

> 黄钟，律吕之首，而生十一律者也。其相生也，皆三分而损益之。是故十二律之得十七万七千一百四十七，是为黄钟之实。又以二乘而三约之，是为下生林钟之实。又以四乘而三约之，是为上生太蔟之实。推此上下，以定六十律之实。以九三之，得万九千六百八十三为法。于律为寸，于准为尺。不盈者十之，所得为分。又不盈十之，所得为小分。以其余正其强弱。②

这段话表明京房的基本方法仍是用三分损益法，以“黄钟之实” $3^{11}=177147$ 开始，依次三分损益相生而得其他各律：①实数（即大数）；“以九三之，得万九千六百八十三为法。”大数除以 $3^{9}=19683$③；得②律数，以寸为单位；③弦准上的振动长度，以尺为单位。

京房首次明确表达了“竹声不可度调”的认识，并因此制作了定律器“准”，形如瑟，长一丈，张十三条弦，有效弦长为九尺。这种用弦律器研究律学的先例，对后世的律学探索产生了深远影响。他对每一律计算出三种数据，首先从黄钟大数出发，交替三分损益法相生得出十二律各律的实数；再以“九三之为法”求出律数，以寸、分、小分（厘）为单位，除不尽时用强或弱表示；弦长，以尺、寸为单位，余数照录。比如这段文字：

> 色育，十七万六千七百七十六。下生谦待。色育为宫，未知商，谦待徵。六日。律，八寸九分小分八微强。准，八尺九寸万五千九百七十三。

这句话的意思是“色育”大数176776除以19683，得商数8.98略有余，故称律数为“八寸九分小分八微强”，以商数8.9为弦准长度还有余数15973。这类数据可在表30中查到，只是在小数点后多保留一位，使原来表述为“强”、“弱”、“微强”、“大强”、“半强”或“半弱”、“微弱”及余数照录的方法有更精确的律学表述。

但用三分损益法生到12次，得到的第13律，并不是理想地回到出发点，而是“微小

① 引自《一笔恼人遗产的松快清理》，《赵宋光文集》第359页。

② 《后汉书·卷九十一·律历志上》，《二十五史》，上海古籍出版社。

③ 这种方法最早记载在《史记·律书·生黄钟》中，原文为“置一而九三之以为法。得长一寸。凡得九寸，命曰黄钟之宫。”

音差”的累积（为了计算方便，将其称为“元差”，借用代号△，表示0.009775全音≈0.01全音=2音分[①]。每相生一次增加一个“元差”——△，相生n次，即增加n△。将“元差”代入计算公式，可以简化计算）[②]，高出0.12全音（24音分），即“古代音差”。每生一批十二律都高出一个“古代音差”，这样一批一批地继续生律，原有的大半音、小半音就被分割成若干份“古代音差”，大半音约可分为5个，小半音约可分为4个，但最后一个都不足一个“古代音差”。

京房确认由仲吕生出高于黄钟一个古代音差的新生律有别于黄钟，因此另外命名为“执始”。

古代音差的音程系数除了在第二章第二节“三分损益律”一节中介绍的办法，还可以由“黄钟相对波长：执始相对波长”算出。

执始的相对波长为：

仲吕	三分益一	生执始
$2^{17}\cdot 3^{-11}$	$\times\frac{4}{3}$	$=2^{19}\cdot 3^{-12}$

故古代音差的音程系数即执始相对波长的倒数：$3^{12}\cdot 2^{-19}=\frac{531441}{524288}$

黄钟至大吕这个大半音之间被“古代音差”分割成五份，也就是说插入了4个新的律位，这几个律位是每生一批12律而产生的，所以生律编号必分别各差12，京房给它们命名为“执始”（12）、丙盛（24）、分动（36）、质末（48）。

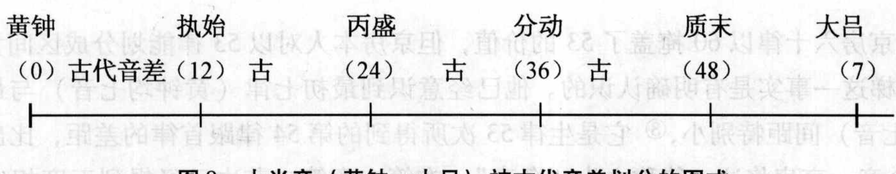


图8　大半音（黄钟→大吕）被古代音差划分的图式

当大半音被分割出4个古代音差后，剩下的“质末”到“大吕”的那段是什么呢？我们可以先算出它的音程值：

大半音－［4×（古代音差）］

＝［0.5＋7△］－［4×12△］

＝0.5－41△＝0.5－0.400775＝0.0992（全音）＝19.845（音分）≈20音分

这段不足一个古代音差的音程留待详究，我们再换个角度来看问题：大半音被古代音差划分为五份，但又不足5个古代音差。那么，5个古代音差比大半音大多少？

---

① 参见第二章第二节“三分损益十二律”。

② “元差”作为计算因子，最早见于赵宋光文《一笔恼人遗产的松快清理》，详见《音乐研究》1993年第3期，第57页－68转92页：60页。

$[5\times12\triangle]-[0.5+7\triangle]=53\triangle-0.5=0.518075-0.5=0.018075$（全音）$=3.615$（音分）

这个微小音差非常重要，从它所包含的53个“元差”，我们可以判断出它就是第53次生律而得的第54律与出发律黄钟的差距，就是著名的“京房微差”。① 京房的推算已经涉及到这个微差，“60律”中最后七律（色育均七音）跟最初七律（黄钟均七音）的间距都是这个微差。由于有了“生律编号”和“质底幂积”作为分析工具，我们已经提前把这个微差找出来了，这便是逻辑分析的功效以及现代律学对古代传统律学的超越。

大半音减去4个古代音差后剩余的那部分，与古代音差之间的差数也正是这个微差：

$0.1173-0.099225=0.018075$（全音）$=3.615$（音分）

反过来说，那段剩余部分就是“古代音差”与“京房微差”的差额。这样，我们就可以将那一段命名为“古京差额”。②

我们已经知道小半音（应钟→黄钟半律）比大半音正好小一个古代音差，小半音被古代音差划分的图式：

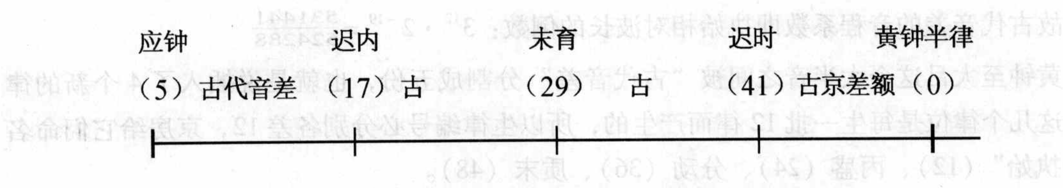


图9　小半音（应钟→黄钟半律）被古代音差划分的图式

虽然京房六十律以60掩盖了53的价值，但京房本人对以53律能划分成区间大致均匀的音律阶梯这一事实是有明确认识的。他已经意识到最初七律（黄钟均七音）与最后七律（色育均七音）间距特别小，③ 它是生律53次所得到的第54律跟首律的差距，比出发律高约0.02全音，京房将这一律称之为“色育”。在第二章第二节中已经提到五度相生（三分损益生律、三分三倍生律）十二律把八度分为5个大半音和7个小半音，现在各自划分的结果总和就是：$5\times5+7\times4=53$。而大半音和小半音被划分为若干个古代音差后，中间还间插着若干“古京差额”。即每隔四份或三份连续的“古代音差”之后就会有一个“古京差额”，总体上有41份“古代音差”和12份“古京差额”，形成53个大致均匀的音律阶梯。

古京差额的音程系数由“大半音的音程系数÷（古代音差的音程系数）^{4}”算出。

$(3^7\cdot2^{-11})\div(3^{12}\cdot2^{-19})^4=3^{-41}\cdot2^{65}$

古京差额的音程值可由音程系数求得：

---

① “京房微差”这个命名最初由王光祈提出，他称为“京氏音差”（京氏 komma），给出的全音数为 0.01781≈3.562 音分。详见《东西乐制之研究・乙编 中国》，载《王光祈音乐论著选集》下册24－88：第43页。

② 这段分析以及“古京差额”详见赵宋光文《一笔恼人遗产的松快清理》第378页。

③ 这从他对“分朞之日”的划分可以看出。

$\text{logg}3^{-41} \cdot 2^{65} = -41\text{logg}3 + 65\text{logg}2$①

$= -41 \times (9.5 + \triangle) + 65 \times 6 = 0.5 - 41\triangle = 0.099225$ 全音 $= 19.845$ 音分 ≈ 20 音分

京房微差的音程系数由"黄钟相对波长：色育相对波长"算出。

色育相对波长 = 应钟相对波长 ×（古代音差音程系数的倒数）^{4} × 八度音程系数

$= (3^{-5} \cdot 2^7) \times (3^{12} \cdot 2^{-19})^4 \times 2 = 3^{-53} \cdot 2^{84}$

色育的相对音高可由这个相对波长求得

$-\text{logg}3^{-53} \cdot 2^{84} = -[-53\text{logg}3 + 84\text{logg}2]$

$= -[-53 \times (9.5 + \triangle) + 84 \times 6] = 53\triangle - 0.5 = 0.018075$ 全音 $= 3.615$ 音分

京房微差的音程系数就是色育相对波长的倒数，即 $3^{53} \cdot 2^{-84}$

在第54律出现之前，八度被53律划分为大致均匀的两种音程，即"古代音差"和"古京差额"。

二、京房的数据及严密的逻辑

现将《后汉书·律历志·律术》所载京房六十律按相生顺序编列下表：

表30

生律编号 律名	(0) 黄钟	(1) 林钟	(2) 太簇	(3) 南吕	(4) 姑洗	(5) 应钟	(6) 蕤宾
相对波长	$2^0 \cdot 3^{-0}$	$2^1 \cdot 3^{-1}$	$2^3 \cdot 3^{-2}$	$2^4 \cdot 3^{-3}$	$2^6 \cdot 3^{-4}$	$2^7 \cdot 3^{-5}$	$2^9 \cdot 3^{-6}$
振动体长度(以尺或寸为单位)	9寸	6寸	8寸	5.333寸	7.111寸	4.741寸	6.321寸
相对音高(全音数)	0	3.51	1.02	4.53	2.04	5.55	3.06
生律编号 律名		(7) 大吕	(8) 夷则	(9) 夹钟	(10) 无射	(11) 仲吕	
相对波长		$2^{11} \cdot 3^{-7}$	$2^{12} \cdot 3^{-8}$	$2^{14} \cdot 3^{-9}$	$2^{15} \cdot 3^{-10}$	$2^{17} \cdot 3^{-11}$	
振动体长度(以尺或寸为单位)		8.428寸	5.619寸	7.492寸	4.994寸	6.659寸	
相对音高(全音数)		0.57	4.08	1.59	5.10	2.61	
生律编号 律名	(12) 执始	(13) 去灭	(14) 时息	(15) 结躬	(16) 变虞	(17) 迟内	(18) 盛变
相对波长	$2^{19} \cdot 3^{-12}$	$2^{20} \cdot 3^{-13}$	$2^{22} \cdot 3^{-14}$	$2^{23} \cdot 3^{-15}$	$2^{25} \cdot 3^{-16}$	$2^{26} \cdot 3^{-17}$	$2^{28} \cdot 3^{-18}$
振动体长度(以尺或寸为单位)	8.879寸	5.919寸	7.892寸	5.261寸	7.015寸	4.677寸	6.236寸
相对音高(全音数)	0.12	3.63	1.14	4.65	2.16	5.67	3.18
生律编号 律名		(19) 分否	(20) 解形	(21) 开时	(22) 闭掩	(23) 南中	
相对波长		$2^{30} \cdot 3^{-19}$	$2^{31} \cdot 3^{-20}$	$2^{33} \cdot 3^{-21}$	$2^{34} \cdot 3^{-22}$	$2^{36} \cdot 3^{-23}$	
振动体长度(以尺或寸为单位)		8.314寸	5.543寸	7.391寸	4.927寸	6.569寸	
相对音高(全音数)		0.69	4.20	1.71	5.22	2.73	

① logg 表示以$\sqrt[6]{2}$为底条件下求对数，详细论证见第11页"田边尚雄方案"。

（续表 1）

生律编号 律名	(24) 丙盛	(25) 安度	(26) 屈齐	(27) 归期	(28) 路时	(29) 未育	(30) 离宫
相对波长	$2^{38}\cdot3^{-24}$	$2^{39}\cdot3^{-25}$	$2^{41}\cdot3^{-26}$	$2^{42}\cdot3^{-27}$	$2^{44}\cdot3^{-28}$	$2^{45}\cdot3^{-29}$	$2^{47}\cdot3^{-30}$
振动体长度(以尺或寸为单位)	8.759 寸	5.839 寸	7.786 寸	5.191 寸	6.921 寸	4.614 寸	6.152 寸
相对音高(全音数)	0.23	3.75	1.25	4.77	2.27	5.78	3.29
生律编号 律名		(31) 凌阴	(32) 去南	(33) 族嘉	(34) 邻齐	(35) 内负	
相对波长		$2^{49}\cdot3^{-31}$	$2^{50}\cdot3^{-32}$	$2^{52}\cdot3^{-33}$	$2^{53}\cdot3^{-34}$	$2^{55}\cdot3^{-35}$	
振动体长度(以尺或寸为单位)		8.202 寸	5.468 寸	7.291 寸	4.861 寸	6.481 寸	
相对音高(全音数)		0.80	4.31	1.82	5.33	2.84	
生律编号 律名	(36) 分动	(37) 归嘉	(38) 随期	(39) 未卯	(40) 形始	(41) 迟时	(42) 制时
相对波长	$2^{57}\cdot3^{-36}$	$2^{58}\cdot3^{-37}$	$2^{60}\cdot3^{-38}$	$2^{61}\cdot3^{-39}$	$2^{63}\cdot3^{-40}$	$2^{64}\cdot3^{-41}$	$2^{66}\cdot3^{-42}$
振动体长度(以尺或寸为单位)	8.641 寸	5.761 寸	7.681 寸	5.121 寸	6.828 寸	4.552 寸	6.069 寸
相对音高(全音数)	0.35	3.86	1.37	4.88	2.39	5.90	3.41
生律编号 律名		(43) 少出	(44) 分积	(45) 争南	(46) 期保	(47) 物应	
相对波长		$2^{68}\cdot3^{-43}$	$2^{69}\cdot3^{-44}$	$2^{71}\cdot3^{-45}$	$2^{72}\cdot3^{-46}$	$2^{74}\cdot3^{-47}$	
振动体长度(以尺或寸为单位)		8.092 寸	5.395 寸	7.193 寸	4.795 寸	6.394 寸	
相对音高(全音数)		0.92	4.43	1.94	5.45	2.96	
生律编号 律名	(48) 质末	(49) 否与	(50) 形晋	(51) 夷汗	(52) 依行		
相对波长	$2^{76}\cdot3^{-48}$	$2^{77}\cdot3^{-49}$	$2^{79}\cdot3^{-50}$	$2^{80}\cdot3^{-51}$	$2^{82}\cdot3^{-52}$		
振动体长度(以尺或寸为单位)	8.525 寸	5.683 寸	7.578 寸	5.052 寸	6.736 寸		
相对音高(全音数)	0.47	3.98	1.49	5.00	2.51		
生律编号 律名	(53) 色育	(54) 谦待	(55) 未知	(56) 白吕	(57) 南授	(58) 分乌	(59) 南事
相对波长	$2^{84}\cdot3^{-53}$	$2^{85}\cdot3^{-54}$	$2^{87}\cdot3^{-55}$	$2^{88}\cdot3^{-56}$	$2^{90}\cdot3^{-57}$	$2^{91}\cdot3^{-58}$	$2^{93}\cdot3^{-59}$
振动体长度(以尺或寸为单位)	8.981 寸	5.987 寸	7.983 寸	5.322 寸	7.096 寸	4.731 寸	6.308 寸
相对音高(全音数)	0.02	3.53	1.04	4.55	2.06	5.57	3.08

在这个表中，从生律编号可以看出其中的规律，左边第二列和右边第一列纵列的四个音上下相邻两音各自相隔 12 次生律，中间五个纵列中，每列上下相邻两音各自相隔 6 次生

律。最后一行（生律编号为53－59）与第一行对齐（生律编号为0－6），两行中纵对齐的两律各自相差一个“京房微差”。

从京房在各律名下都附注分朞之日可以得知，他已经发现了在前53律形成了大致均匀的音律阶梯。他虽然发表的律制是“60律”，但他本人很清楚最后7律（从色育开始的7律）的出现反而造成八度内的明显不均匀。

现在根据《后汉书·律历志·律术》所载京房六十律的高低顺序列出下表：（见下页表31）

最后生出的七声所构成的色育均虽然使60律反倒不均匀了，但同时也因为对黄钟均可以进行整体移位一个京房微差，提供了变换音律的最小幅度以及生律来由，而且暗示出可预见到的继续相生结果。

京房将一年366天分配给60律，每律掌管一至八天，第一批12律（黄钟均）每律统领一月共合12月；现在可以描述大半音、小半音、“古代音差”、“古京差额”和“京房微差”的特征，并根据生律编号及元差换算出音程值。

以黄钟→大吕为大半音模型，生律编号相差7，高者为大。

音程值：$0.5+7\triangle=0.5+7\times0.009775=0.568425$（全音）$=113.685$（音分）

以大吕→太簇为小半音模型，生律编号相差5，低者为大。

音程值：$0.5-5\triangle=0.5-5\times0.009775=0.451125$（全音）$=90.225$（音分）

以黄钟→执始为“古代音差”模型，生律编号相差12，高者为大；

音程值：$12\triangle=12\times0.009775=0.1173$（全音）$=23.46$（音分）

以质末→大吕为“古京差额”模型，生律编号相差41，低者为大。

音程值：$0.5-41\triangle=0.5-41\times0.009775=0.099225$（全音）$=19.845$（音分）

以黄钟→色育为“京房微差”模型，生律编号相差53，高者为大。

音程值：$53\triangle-0.5=53\times0.009775-0.5=0.018075$（全音）$=3.615$（音分）

根据这样的特征来检审纵向各律和横向各律，可以很容易判断出相互之间的音程关系：从纵向看，黄钟均与色育均之间为“京房微差”；色育均与执始均之间、质末均与大吕均之间为“古京差额”；执始均与丙盛均之间、丙盛均与分动均之间、分动均与质末均之间为“古代音差”；从横向看，黄钟正律至黄钟半律之间，每相邻两律依次为大、小、大、小、大、小、小、大、小、大、小、小两种半音。

三、钱乐之三百六十律

钱乐之在京房六十律的基础上继续用三分损益法生律（438年前后），第359次生律得到第360律，他称之为“安运”。钱乐之在认识上并没有京房那样清醒，他的360律的不均匀性是从第306次生律得到“亿兆”那一律就开始了。试看，当生律第53次产生一个“京房微差”，以后每生一批53律都比前一批53律高出一个“京房微差”，当他把41份“古代音差”和12份“古京差额”分割成若干“京房微差”时，却总剩下半份“京

表31（全音数保留小数点后2位）

黄钟均	律序 律名 相对波长 音高 日数	0 黄钟 $2^{0}\cdot3^{-0}$ 0 1	7 大吕 $2^{11}\cdot3^{-7}$ 0.57 8	2 太簇 $2^{3}\cdot3^{-2}$ 1.02 1	9 夹钟 $2^{14}\cdot3^{-9}$ 1.59 6	4 姑洗 $2^{6}\cdot3^{-4}$ 2.04 1	11 仲吕 $2^{17}\cdot3^{-11}$ 2.61 8	6 蕤宾 $2^{9}\cdot3^{-6}$ 3.06 1	1 林钟 $2^{1}\cdot3^{-1}$ 3.51 1	8 夷则 $2^{12}\cdot3^{-8}$ 4.08 8	3 南吕 $2^{4}\cdot3^{-3}$ 4.53 1	10 无射 $2^{15}\cdot3^{-10}$ 5.10 8	5 应钟 $2^{7}\cdot3^{-5}$ 5.55 1	相邻音差
色育均	律序 律名 相对波长 音高 日数	53 色育 $2^{84}\cdot3^{-53}$ 0.02 6		55 未知 $2^{87}\cdot3^{-55}$ 1.04 6		57 南授 $2^{90}\cdot3^{-57}$ 2.06 6		59 南事 $2^{93}\cdot3^{-59}$ 3.08 7	54 谦待 $2^{85}\cdot3^{-54}$ 3.53 5		56 白吕 $2^{88}\cdot3^{-56}$ 4.55 5		58 分乌 $2^{91}\cdot3^{-58}$ 5.57 7	京房音差
执始均	律序 律名 相对波长 音高 日数	12 执始 $2^{19}\cdot3^{-12}$ 0.12 6	19 分否 $2^{30}\cdot3^{-19}$ 0.69 8	14 时息 $2^{22}\cdot3^{-14}$ 1.14 6	21 开时 $2^{33}\cdot3^{-21}$ 1.71 8	16 变虞 $2^{25}\cdot3^{-16}$ 2.16 6	23 南中 $2^{36}\cdot3^{-23}$ 2.73 7	18 盛变 $2^{28}\cdot3^{-18}$ 3.18 7	13 去灭 $2^{20}\cdot3^{-13}$ 3.63 7	20 解形 $2^{31}\cdot3^{-20}$ 4.20 8	15 结躬 $2^{23}\cdot3^{-15}$ 4.65 6	22 闭掩 $2^{34}\cdot3^{-22}$ 5.22 8	17 迟内 $2^{26}\cdot3^{-17}$ 5.67 8	古京音差
丙盛均	律序 律名 相对波长 音高 日数	24 丙盛 $2^{38}\cdot3^{-24}$ 0.23 6	31 凌阴 $2^{49}\cdot3^{-31}$ 0.80 8	26 屈齐 $2^{41}\cdot3^{-26}$ 1.25 6	33 族嘉 $2^{52}\cdot3^{-33}$ 1.82 8	28 路时 $2^{44}\cdot3^{-28}$ 2.27 6	35 内负 $2^{55}\cdot3^{-35}$ 2.84 8	30 离官 $2^{47}\cdot3^{-30}$ 3.29 7	25 安度 $2^{39}\cdot3^{-25}$ 3.75 6	32 去南 $2^{50}\cdot3^{-32}$ 4.31 8	27 归期 $2^{42}\cdot3^{-27}$ 4.77 6	34 邻齐 $2^{53}\cdot3^{-34}$ 5.33 7	29 未育 $2^{45}\cdot3^{-29}$ 5.78 8	古代音差
分动均	律序 律名 相对波长 音高 日数	36 分动 $2^{57}\cdot3^{-36}$ 0.35 6	43 少出 $2^{68}\cdot3^{-43}$ 0.92 6	38 随期 $2^{60}\cdot3^{-38}$ 1.37 6	45 争南 $2^{71}\cdot3^{-45}$ 1.94 8	40 形始 $2^{63}\cdot3^{-40}$ 2.39 5	47 物应 $2^{74}\cdot3^{-47}$ 2.96 7	42 制时 $2^{66}\cdot3^{-42}$ 3.41 8	37 归嘉 $2^{58}\cdot3^{-37}$ 3.86 6	44 分积 $2^{69}\cdot3^{-44}$ 4.43 7	39 未卯 $2^{61}\cdot3^{-39}$ 4.88 6	46 期保 $2^{72}\cdot3^{-46}$ 5.45 8	41 迟时 $2^{64}\cdot3^{-41}$ 5.90 6	古代音差
质末均	律序 律名 相对波长 音高 日数	48 质末 $2^{76}\cdot3^{-48}$ 0.47 6		50 形晋 $2^{79}\cdot3^{-50}$ 1.49 6		52 依行 $2^{82}\cdot3^{-52}$ 2.51 7			49 否与 $2^{77}\cdot3^{-49}$ 3.98 5		51 夷汗 $2^{80}\cdot3^{-51}$ 5.00 7			古代音差
分蕃之日		累积天数 31	累积天数 30	累积天数 31	累积天数 30	累积天数 31	累积天数 30	累积天数 30	累积天数 30	累积天数 31	累积天数 31	累积天数 31	累积天数 30	

房微差”。

我们仍以图式表示：

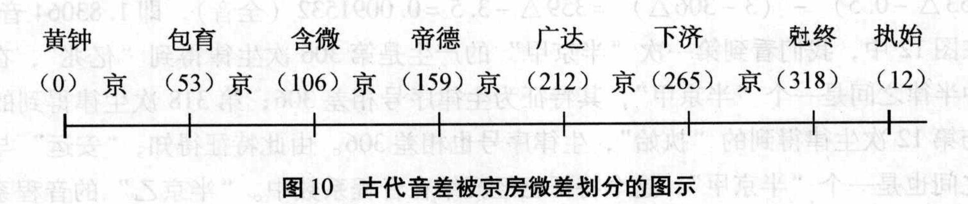


图10　古代音差被京房微差划分的图示

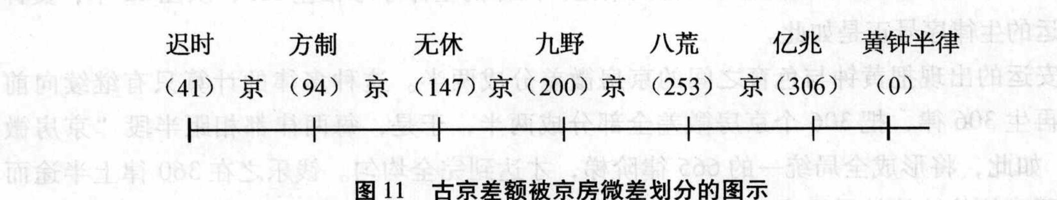


图11　古京差额被京房微差划分的图示

以上两个图示显示出“古代音差”被分割为6份“京房微差”后剩下一段，恰好是半段“京房微差”；“古京差额”被分割为5份“京房微差”后剩下一段，恰好也是半段“京房微差”。因为这是“京房微差”的前半段，可以称为“半京甲”。

“半京甲”的音程系数可用“古代音差的音程系数÷（京房微差的音程系数）^{6}”算出：

$3^{12}\cdot 2^{-19}\div(3^{53}\cdot 2^{-84})^6=3^{-306}\cdot 2^{485}$

其音程值可由音程系数算出，也可用“古代音差－6×（京房微差）”算出：

$12\triangle-6\times(53\triangle-0.5)=3-306\triangle=0.0089112$（全音），即1.78224音分

按上两图示的划分样式，41份古代音差都被划分为6份京房微差和1份半京甲，12份古京差额都被划分为5份京房微差和1份半京甲，于是形成$41\times6+12\times5=306$个京房微差，其中又插入$41+12=53$份半京甲，共有359个不均匀的音律区间。钱乐之做了第359次生律，得到第360律，他称之为“安运”，并安插在“应钟一部”。但这音实际已高于黄钟半律，位于黄钟半律与色育半律之间，并不属于“应钟部”。亿兆（306）至安运（359）之间的京房微差被黄钟半律分割了，那么黄钟半律（0）至安运之间的微差就是京房微差减去半京甲所剩的后半段，可以称为“半京乙”。

我们仍以图示来看“半京乙”的划分情况。

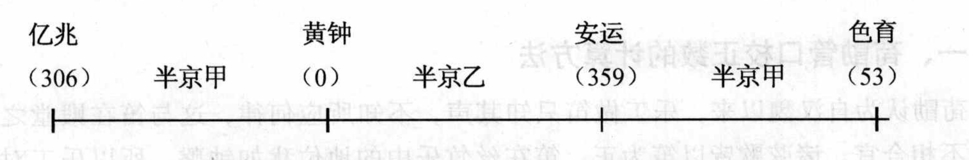


图12　黄钟至色育被划分为两部分的图示

“半京乙”的音程系数可用“京房微差的音程系数÷半京甲的音程系数”算出：

$(3^{53}\cdot 2^{-84})\div(3^{-306}\cdot 2^{485})=3^{359}\cdot 2^{-569}$

其音程值可由音程系数算出，也可用“京房微差的音程值－半京甲的音程值”算出，它的数值等于正确落位（移低八度）安运的相对音高：

（53△－0.5）－（3－306△）＝359△－3.5＝0.0091532（全音），即1.83064音分

在图12中，我们看到第一次“半京甲”的产生是第306次生律得到“亿兆”，在亿兆至黄钟半律之间是一个“半京甲”，其特征为生律序号相差306；第318次生律得到的“尅终”与第12次生律得到的“执始”，生律序号也相差306。由此特征得知，“安运”与“色育”之间也是一个“半京甲”，这个特征已经凝结在音程系数中。“半京乙”的音程系数为$3^{359}\cdot2^{-569}$，从3底幂的指数也可以得到结论：两律的生律序号相差359，从图12中，黄钟至安运的生律序号正是如此。

安运的出现把黄钟与色育之间的京房微差分成两半。这种多律的计算只有继续向前走，再生306律，把306个京房微差全部分成两半，于是，每两律都相距半段“京房微差”，如此，将形成全局统一的665律阶梯，才达到完全均匀。钱乐之在360律上半途而止，所以他的计算结果没有获得应有的意义。赵宋光在《一笔恼人遗产的松快清理》一文中把三分损益法对八度音程的划分比做经历了三块里程碑：第一里程段，用三分损益法算出12律，把八度划分为大小半音、不严格均匀的音律阶梯；第二里程段用三分损益法算出53律，把八度音程划分为“古代音差”和“古京差额”两种不严格均匀的音律阶梯；而只有继续生律到665律，才能到达第三块里程碑，达到完全均匀。当然，在古代乐律学史上，没有人达到过这个目标，我们用今天的数学方法，把握住这样的思维逻辑，很容易简明剖析京房六十律和钱乐之三百六十律的意义，了解其中的智能价值和不足，用逻辑的方法迅速达到第三块里程碑。同时，在生律法中，运用反生法，用306个反生音律把京房微差分成两半，将使各律相对波长所含指数的绝对值不再增大，各律相对音高所含“元差”（△）数目的绝对值也不会再增大。而且，这样的做法弥补了三分损益法不认反生的缺陷。

各位切记，重要的不是记住以上提到的大量具体数据，而是我们所使用的抽象方法。那会令我们已有的知识更成倍地放射力量。

第四节　应用律学的成果——荀勖笛律

历史上，三分损益法在应用律学方面最值得一提的是晋代荀勖笛律（荀勖卒于289年）。

一、荀勖管口校正数的计算方法

荀勖认为自汉魏以来，乐工做笛只知其声，不知所应何律，这与笛在殿堂之乐中的地位不相合宜。诸弦歌皆以笛为正，笛在丝竹乐中的地位犹如钟磬，所以乐工对统率调高的笛只停留在以长度“尺寸名之”，实在“俗而不典”。因此认为有依照十二律制作十二笛的必要。他命人依律做了大吕笛，校吹每孔一律共七律，都很准，以致于让协律中郎将列和慨叹：“自和父祖汉世以来，笛家相传，不知此法，而令调均与律相应，实非所及

也。"① 依律制作十二律笛，每换某均，执乐者就可以说"请奏某某"，比如"请奏黄钟"云云。

所谓"竹声不可度调"，是因为管内气柱振动时，气柱长度长于管的长度，也就是说，当吹响一支管时，气柱的一部分要突出在管口外。因此，要按照音的高度计算管的长度时，就要找出气柱长与管长之间的差数，这个差数就是管口校正的数据。

黄钟之笛，正声应黄钟，下徵应林钟，长二尺八寸四分四厘有奇。正声调法，以黄钟为宫，则姑洗为角，翕笛之声应姑洗，故以四角之长为黄钟之笛也。其宫声正而不倍，故曰正声。②

这段文字记载的是荀勖制笛的方法，并可看出他寻找管口校正数的方法。晋代荀勖在三分损益法的基础上，得出管口校正的数据与规律是：一支律管的长度与另一高四律（即宫、角两音）的律管长度的差数。③

《晋书·卷十六·律志·五音十二律》列出了三分损益相生出十二律数的结果，为了排列出长短有序的十二律，有三律给出倍数。

十一月，律中黄钟，律之始也，长九寸。……

十二月，律中大吕，司马迁未下生之律，长四寸二百四十三分寸之五十二，倍之为八寸二百四十三分寸之一百四。……

正月，律中太簇，未上生之律，长八寸。……

二月，律中夹钟，酉下生之律，长三寸二千一百八十七分寸之一千六百三十一，倍之为七寸二千一百八十七分寸之一千七十五。……

三月，律中姑洗，酉上生之律，长七寸九分寸之一。……

四月，律中仲吕，亥下生之律，长三寸万九千六百八十三分寸之六千四百八十七，倍之为六寸万九千六百八十三分寸之万二千九百七十四。……

五月，律中蕤宾，亥上生之律，长六寸八十一分寸之二十六。……

六月，律中林钟，丑下生之律，长六寸。……

七月，律中夷则，丑上生之律，长五寸七百二十九分寸之四百五十一。……

八月，律中南吕，卯下生之律，长五寸三分寸之一。……

九月，律中无射，卯上生之律，长四寸六千五百六十一分寸之六千五百二十四。……

十月，律中应钟，巳下生之律，长四寸二十七分寸之二十。……④

① 《晋书·卷十六·律志》，《历代乐志律志校释》第二分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社 1999 年 9 月北京第 1 版，第 17 页。

② 同①，第 20 页。

③ 王子初在他的研究中论证"宫角之差"并不是荀勖的管口校正数。详见其专著《荀勖笛律研究》。

④ 同①，第 28 – 31 页。

用清晰逻辑的律学方法表达他的计算过程，应该是这样的：

黄钟律管9寸，高四律的姑洗律管为$7\frac{1}{9}$寸，二者的差数为$9-7\frac{1}{9}=1\frac{8}{9}$，折算为现代长度单位，这个差数＝4.36118≈4.3612厘米①；由此，我们可以依次算出十二笛的管口校正数：

表32

律吕	律数（×2.308864＝cm）	高四律者律数	管口校正（寸）	厘米
黄钟	9寸＝20.779776cm	姑洗$7\frac{1}{9}$寸	$9-7\frac{1}{9}=1\frac{8}{9}$	4.3612
林钟	6寸＝13.853184cm	应钟$4\frac{20}{27}$寸	$6-4\frac{20}{27}=1\frac{7}{27}$	2.90746
太蔟	8寸＝18.470912cm	蕤宾$6\frac{26}{81}$寸	$8-6\frac{26}{81}=1\frac{55}{81}$	3.8766
南吕	$5\frac{1}{3}$寸＝12.3139413cm	大吕$8\frac{104}{243}$寸	$5\frac{1}{3}-8\frac{104}{243}\times\frac{1}{2}=1\frac{29}{243}$	2.5844
姑洗	$7\frac{1}{9}$寸＝16.4185884cm	夷则$5\frac{451}{729}$寸	$7\frac{1}{9}-5\frac{451}{729}=1\frac{359}{729}$	3.4459
应钟	$4\frac{20}{27}$寸＝10.945726cm	夹钟$7\frac{1075}{2187}$寸	$4\frac{20}{27}-7\frac{1075}{2187}\times\frac{1}{2}=\frac{2176}{2187}$	2.29725
蕤宾	$6\frac{26}{81}$寸＝14.594300cm	无射$4\frac{6524}{6561}$寸	$6\frac{26}{81}-4\frac{6524}{6561}=1\frac{2143}{6561}$	3.063
大吕	$8\frac{104}{243}$寸＝19.459068cm	仲吕$6\frac{12974}{19683}$寸	$8\frac{104}{243}-6\frac{12974}{19683}=1\frac{15133}{19683}$	4.084
夷则	$5\frac{451}{729}$寸＝12.972712cm	黄钟9寸	$5\frac{451}{729}-9\times\frac{1}{2}=1\frac{173}{1458}$	2.5828
夹钟	$7\frac{1075}{2187}$寸＝17.296949cm	林钟6寸	$7\frac{1075}{2187}-6=1\frac{1075}{2187}$	3.4438
无射	$4\frac{6524}{6561}$寸＝11.531299cm	太蔟8寸	$4\frac{6524}{6561}-8\times\frac{1}{2}=\frac{6524}{6561}$	2.29584
仲吕	$6\frac{12974}{19683}$寸＝15.3750659cm	南吕$5\frac{1}{3}$寸	$6\frac{12974}{19683}-5\frac{1}{3}=1\frac{6413}{19683}$	3.06112

二、荀勖十二笛及开孔数据

他以所知的管口校正数制成12支笛子（直吹），以应十二律，又在各笛上开孔，可以吹全每均音阶。

以《晋书》中荀勖笛律的数据记载，我们首先可以求出黄钟笛的长度。

---

① 根据杨荫浏《中国音乐史纲》中提供的数据，荀勖所用尺与晚周及刘歆尺相同，一尺合今23.08864厘米。见杨书第152页及155页，1952年上海万叶书店出版。

荀勖以四倍于姑洗律管长度作为黄钟笛的长度，因此可知：

黄钟笛的长度为 $4\times7\frac{1}{9}$ 寸 = 2.8444 尺，关于这个数据，荀勖的原话是“长二尺八寸四分四厘有奇”（“奇”意为“有余”），折算为现代长度单位为：

2.8444 尺 × 23.08864 = 65.67321384 厘米

下边这段话告诉我们他是如何求各笛长度及各音的开孔处：

> 正声调法，黄钟为宫。作黄钟之笛，将求宫孔，以姑洗及黄钟律，从笛首下度之，尽二律之长而为孔，则得宫声也。宫生徵，黄钟生林钟也。以林钟之律从宫孔下度之。尽律作孔，则得徵声也。徵生商，林钟生太蔟也。以太蔟律从徵孔上度之，尽律以为孔，则得商声也。商生羽，太蔟生南吕也。以南吕律从商孔下度之，尽律为孔，则得羽声也。羽生角，南吕生姑洗也。以姑洗律从羽孔上行度之，尽律而为孔，则得角声也。然则于商孔之上，吹笛者左手所不及也。从羽孔下行度之，尽律而为孔，亦得角声，出于商附孔之下，则吹者右手所不逮也，故不作角孔。推而下之，复倍其均，是以角声在笛体中，古之制也。……角生变宫，姑洗生应钟也。上句所谓当为角孔而出于商上者，墨点识之，以应钟律。从此点下行度之，尽律为孔，则得变宫之声也。变宫生变徵，应钟生蕤宾也。以蕤宾律从变宫下度之，尽律为孔，则得变徵之声。十二笛之制，各以其宫为主，相生之法，或倍或半，其便事用，例皆一也。①

文中的“下度”即加某律之长度，“上度”则为减某律之长度。将这段话整理如下：

黄钟律长 + 姑洗律长 = 黄钟笛官声孔位距吹口的长度（第五孔）

9 寸 + $7\frac{1}{9}$ 寸 = $16\frac{1}{9}$ 寸，$16\frac{1}{9}$ 寸 × 2.308864 = 37.198364 厘米

宫声孔位长度 + 林钟律长 = 黄钟笛徵声孔位长度（第二孔）

$16\frac{1}{9}$ 寸 + 6 寸 = $22\frac{1}{9}$ 寸，$22\frac{1}{9}$ 寸 × 2.308864 = 51.051548 厘米

徵声孔位长度 − 太簇律长 = 黄钟笛商声孔位长度（背孔）

$22\frac{1}{9}$ 寸 − 8 寸 = $14\frac{1}{9}$ 寸，$14\frac{1}{9}$ 寸 × 2.308864 = 32.580636 厘米

商声孔位长度 + 南吕律长 = 黄钟笛羽声孔位长度（第三孔）

$14\frac{1}{9}$ 寸 + $5\frac{1}{3}$ 寸 = $19\frac{4}{9}$ 寸，$19\frac{4}{9}$ 寸 × 2.308864 = 44.894578 厘米

羽声孔位长度 + 姑洗律长 = 黄钟笛倍角声长度（笛长，闭孔“角声在笛体中”）

$19\frac{4}{9}$ 寸 + $7\frac{1}{9}$ 寸 = $26\frac{5}{9}$ 寸，$26\frac{5}{9}$ 寸 × 2.308864 = 61.313166 厘米

（这个数等于黄钟笛长减去管口校正数。）

羽声孔位长度 − 姑洗律长 = 黄钟笛正角声长度

① 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第 20－21 页。

$19\frac{4}{9}$寸 $-7\frac{1}{9}$寸 $=12\frac{1}{3}$寸，$12\frac{1}{3}$寸 $\times 2.308864=28.475989$ 厘米

角声长度 + 应钟律长 = 黄钟笛变宫声孔位长度（第四孔）

$12\frac{1}{3}$寸 $+4\frac{20}{27}$寸 $=17\frac{2}{27}$寸，$17\frac{2}{27}$寸 $\times 2.308864=39.421715$ 厘米

变宫声孔位长度 + 蕤宾律长 = 黄钟笛变徵声孔位长度（第一孔）

$17\frac{2}{27}+6\frac{26}{81}$寸 $=23\frac{32}{81}$寸，$23\frac{32}{81}$寸 $\times 2.308864=54.016016$ 厘米

最后一句话“十二笛之制，各以其宫为主，相生之法，或倍或半，其便事用，例皆一也。”介绍了十二笛都是以同一原理制成，各自开孔都是以各律作为宫音开始，上方角音所应之律管长度的四倍于角音律管长度作为笛长。

表 33 下表为十二律笛长度，同时列出晋尺单位以及折算为现代长度单位（cm）

十二律笛	各笛长度（尺）	合今长度（cm）	管口校正（cm）
黄钟之笛	2.8444	65.6744	4.3612
林钟之笛	3.792	87.5658	2.9075
太蔟之笛	2.5284	58.3773	3.8766
南吕之笛	3.37119	77.8362	2.5844
姑洗之笛	2.2474	51.8894	3.4459
应钟之笛	2.9966	69.1874	2.297
蕤宾之笛	3.995	92.239	3.063
大吕之笛	2.6636	61.4989	4.084
夷则之笛	3.6	83.119	2.5828
夹钟之笛	2.4	55.4127	3.4438
无射之笛	3.2	73.8836	2.2958
仲吕之笛①	2.133	49.2481	3.0611

① 据丘琼荪《历代乐志律志校释·第二分册·晋书律志》第 26 页注 4 云：仲吕笛，此志原本缺失，宋志亦脱漏，根据杨荫浏《中国音乐史纲》1952 年上海万叶书店本补校。杨先生没有列出他的计算方法，想必是以仲吕之角南吕律长 $5\frac{1}{3}$寸的四倍求出，也可以从无射之笛三尺二寸 $\times\frac{2}{3}$（三分损一）求出。但《晋书·律志》中有一句很重要的话“或倍或半，或四分一，取则于琴徽也。”这说明荀勖在生律时不只限于三分生律，还运用了三倍生律的简便方法，从黄钟之笛 $2.844\times\frac{3}{4}=2.133$ 尺；而前两种方法则得到循环小数 2.13333……。

正声调法：黄钟为宫，第一孔也。应钟为变宫，第二孔也。南吕为羽，第三孔也。林钟为徵，第四孔也。蕤宾为变徵，第五附孔也。姑洗为角，笛体中声。太簇为商。笛后出孔也。商声浊于角，当在角下，而角声以在体中，故上其商孔，令在宫上，清于宫也。然则宫商正也，余声皆倍也。①

根据这段原文和上表中计算出来的数据，可以勾勒出黄钟笛的开孔图：

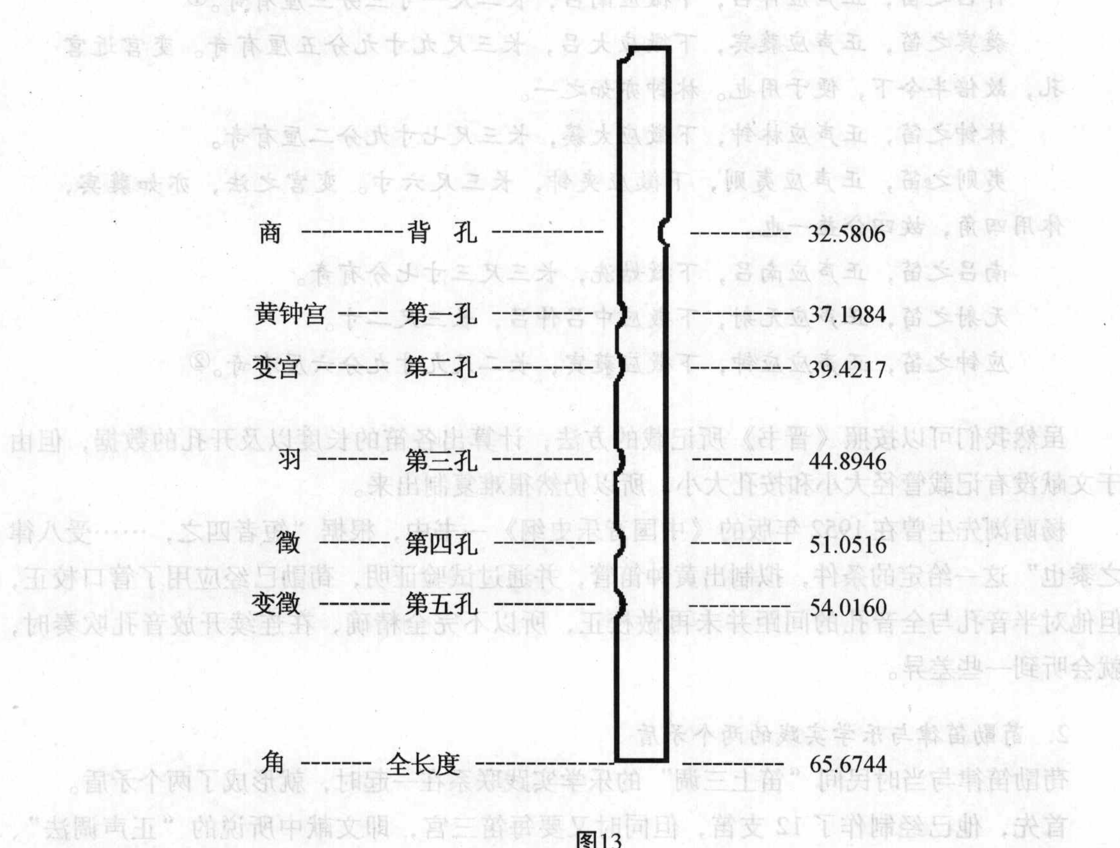


图13

三、荀勖笛律留下的难题

1．对文献的校勘与补缺

对照晋书中的记载，太簇、姑洗、林钟三律之笛的数据有误，我们可以核校计算而予以校勘，仲吕之笛缺失的数据也可以补齐。

……凡笛体用角律，其长者八之，蕤宾、林钟也。短者四之。其余十笛皆四角也。

① 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第20－21页。

空中实容，长者十六。短笛竹宜受八律之黍也。若长短不合于此，或器用不便声均法度之齐等也。然笛竹率上大下小，不能均齐，必不得已，取其声均合。……

大吕之笛，正声应大吕，下徵应夷则，长二尺六寸六分三厘有奇。

太蔟之笛，正声应太蔟，下徵应南吕，长二尺五寸二分八厘有奇。

夹钟之笛，正声应夹钟，下徵应无射，长二尺四寸。

姑洗之笛，正声应姑洗，下徵应应钟，长二尺二寸四分七厘有奇。

仲吕之笛，正声应仲吕，下徵应南吕，长二尺一寸三分三厘有奇。①

蕤宾之笛，正声应蕤宾，下徵应大吕，长三尺九寸九分五厘有奇。变宫近宫孔，故倍半令下，便于用也。林钟亦如之一。

林钟之笛，正声应林钟，下徵应太簇，长三尺七寸九分二厘有奇。

夷则之笛，正声应夷则，下徵应夹钟，长三尺六寸。变宫之法，亦如蕤宾，体用四角，故四分益一也。

南吕之笛，正声应南吕，下徵姑洗，长三尺三寸七分有奇。

无射之笛，正声应无射，下徵应中吕仲吕，长三尺二寸。

应钟之笛，正声应应钟，下徵应蕤宾，长二尺九寸九分六厘有奇。②

虽然我们可以按照《晋书》所记载的方法，计算出各笛的长度以及开孔的数据，但由于文献没有记载管径大小和按孔大小，所以仍然很难复制出来。

杨荫浏先生曾在1952年版的《中国音乐史纲》一书中，根据“短者四之，……受八律之黍也”这一给定的条件，拟制出黄钟笛管，并通过试验证明，荀勖已经应用了管口校正，但他对半音孔与全音孔的间距并未再做校正，所以不完全精确，在连续开放音孔吹奏时，就会听到一些差异。

2. 荀勖笛律与乐学实践的两个矛盾

荀勖笛律与当时民间“笛上三调”的乐学实践联系在一起时，就形成了两个矛盾。

首先，他已经制作了12支笛，但同时又要每笛三宫，即文献中所说的“正声调法”、“下徵调法”和“清角之调”。如此一来，便从实践应用上否定了十二笛存在的必要性。所以，虽然做出了理论上合乎道理的12支笛，但在实用上并不方便，因此并未真正被使用。

第二个矛盾是翻调不便。以下将对照原文列表展示三调之间各音的对应关系：

下徵调法：林钟为宫，第四孔也。本正声黄钟之徵。徵清，当在宫上，用笛

---

① 原校为“长二尺一寸三分三厘有奇”。以三倍生律可从黄钟笛直接得出仲吕笛长，厘后无余数，可删去“有奇”二字，如前页注①。

② 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第24－26页。表33中保留到小数点后4位，故原文中的“有奇”可从表中查知更精确的数据。

之宜，倍令浊下，故曰下徵。下徵更为宫者，《记》所谓'五声，十二律还相为宫'也。然则正声清，下徵为浊也。南吕为商，第三孔也。本正声黄钟之羽，今为下徵之商也。应钟为角，第二孔也。本正声黄钟之变宫，今为下徵之角也。黄钟为变徵，下徵之调，林钟为宫，大吕当为变徵，而黄钟笛本无大吕之声，故假用黄钟以为变徵也。假用之法，当为变徵之声，则俱发黄钟及太簇、应钟三孔。黄钟应浊而太簇清，大吕律在二律之间，俱发三孔而微磑䃃之，则得大吕变徵之声矣。诸笛下徵调求变徵之法，皆如此也。太簇为徵，笛后出孔。本正声之商，今为下徵之徵也。姑洗为羽，笛体中翕声。本正声之角，今为下徵之羽。蕤宾为变宫。附孔是也。本正声之变徵也，今为下徵之变宫也。然则正声之调，孔转下转浊，下徵之调，孔转上转清也。

清角之调：以姑洗为宫，即是笛体中翕声。于正声为角，于下徵为羽。清角之调乃以为宫，而哨吹令清，故曰清角。惟得为宛诗谣俗之曲，不合雅乐也。蕤宾为商，正也。林钟为角，非正也。南吕为变徵，非正也。应钟为徵，正也。黄钟为羽，非正也。太簇为变宫。非正也。清角之调，唯宫、商及徵与律相应，余四声非正者皆浊，一律哨吹令清，假而用之，其例一也。①

表 34

合今之指法	孔位	第五孔	第四孔	背孔	第三孔	闭孔	第二孔	第一孔
	律名	黄钟	林钟	太簇	南吕	姑洗	应钟	蕤宾
尺字调指法	正声调法	宫	徵	商	羽	角	变宫	变徵
正宫调指法	下徵调法	变徵②	宫	徵	商	羽	角	变宫
凡字调指法	清角之调③	♭羽	♭角	♭变宫	♭变徵	宫	徵	商

从上表的比较可以看出第二个矛盾，即“清角之调：……林钟为角，非正也。南吕为变徵，非正也。……黄钟为羽，非正也。太簇为变宫，非正也。……哨吹令清，假而用之……”哨吹在一笛上吹奏三宫，清角之调吹不准，下徵调的“变徵”音也不是从第五孔吹出。那么，这样的笛子只有一宫是准的，而要转清角之调是根本不可能的。

荀勖制笛有其经验性约数，还难说他是有物理学的精确数据，但在当时能造出达到这

① 《历代乐志律志校释·晋书·律志》第 23 – 24 页。

② 原文已说明“俱发三孔而微磑䃃之，则得大吕变徵之声矣。”所以“变徵”之音并不是第一孔所生，也不是用叉口指法，而是开第五孔、背孔和第二孔（即黄钟、太簇、应钟）。

③ “清角之调”只有姑洗、应钟、蕤宾三律得正声，其余四声皆浊而非正声，急吹（高八度）或超吹（高八度又纯五度）只能得低半音，故言“哨吹令清，假而用之”。

样精确程度的管乐器，又能得出管口校正的规律和数据，在应用律学上有很大贡献。这个例子似乎也能透视出，自古以来，存在着理论家陶醉于自己的推演而缺少实践检验的情况。事实上，乐人在自己的实践中有更简单直接的纠正方法，《晋书》也记载了荀勖采访列和的对话，从列和的介绍中可知，“笛上三调”的翻调是不成问题的。①

第五节　何承天新律及其他

一、何承天化繁为简的新律

与京房增加律数截然相反的作法是简化音律并能够黄钟还原，这种探索始推何承天新律（何承天，公元370～447年）。

【隋书·卷十六·律历志】何承天《立法制议》云：“上下相生，三分损益其一，盖是古人简易之法。犹如古历周天三百六十五度四分之一，后人改制，皆不同焉。而京房不悟，谬为六十。”承天更设新率，则从仲吕还得黄钟，十二旋宫，声韵无失。黄钟长九寸，太簇长八寸二厘，林钟长六寸一厘，应钟长四寸七分九厘强。其仲吕上生所益之分，还得十七万七千一百四十七，复十二辰参之数。②

据《宋书·律志》记载：“今上生不及黄钟实二千三百八十四，九约实一千九百六十八为一分……”《宋书·律志》中有个表，列出了全部的律数，单位保留到寸、分、厘，厘以后用“强”、“弱”、“大强”、“大弱”、“小强”、“小弱”等表示。何承天的计算法是先以传统“三分损益法”，从黄钟大数177147开始算起，依次得出十二律数，继而再三分益一上生从“仲吕还得黄钟”，得实数$174762\frac{2}{3}$，比出发律黄钟大数177147短$2384\frac{1}{3}$。何承天将这个差数12等分，即$2384\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}$，依次递加在三分损益法所生各律上，再将各律调整过的实数除以3^9（19683）得各律位的振动体长度。

现在将何承天大数差额用公式表达为：$2^0\cdot3^{11}-2^{19}\cdot3^{-1}=2384\frac{1}{3}=2384.3333$

将这个差额12等分，即：

$$(2^0\cdot3^{11}-2^{19}\cdot3^{-1})\div12=\begin{bmatrix}2^0\cdot3^{11}\cdot\frac{1}{2\cdot2\cdot3}\\-2^{19}\cdot3^{-1}\cdot\frac{1}{2\cdot2\cdot3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2^{-2}\cdot3^{10}\\-2^{17}\cdot3^{-2}\end{bmatrix}=2^{-2}\cdot3^{-2}\cdot\begin{bmatrix}3^{12}\\-2^{19}\end{bmatrix}=\frac{3^{12}-2^{19}}{36}=\frac{7153}{36}$$

① 今人王子初的研究结果认为，荀勖十二管是正律器而非乐器。依此观点，荀勖十二笛不存在“笛上三调”的实践问题。

② 《隋书·卷十六·律历志》，《二十五史》。

根据何承天算法，自黄钟大数177147，以三分损益法逐次求出十二律律数后，每律还要求增加数值：

$\frac{7153}{36}$×生律次数

如此便得到何承天算法新律数，制成下表35，表中数据与《宋书·律志》中记载的“新律度”、“新律分”是一致的。

表35

律名	三分损益法律数	各项×3^{-9}求旧律数振动体长度(寸)	何承天算法	新律律数	各项×3^{-9}求新律数振动体长度(寸)	相对波长	全音数	音分数	与12平均律的差数
黄钟	$177147=2^0\cdot3^{11}$	$2^0\cdot3^{11}\times3^{-9}=2^0\cdot3^2=9$	$177147=2^0\cdot3^{11}$	$177147=2^0\cdot3^{11}$	$2^0\cdot3^{11}\times3^{-9}=2^0\cdot3^2=9$	1	0	0	
林钟	$118098=2^1\cdot3^{10}$	$2^1\cdot3^{10}\times3^{-9}=2^1\cdot3^1=6$	$2^1\cdot3^{10}+\frac{7153}{36}\times1$	$118296\frac{25}{36}=3^2\times13144+\frac{5^2}{2^2\cdot3^2}$	$(3^2\times13144+\frac{5^2}{2^2\cdot3^2})\times3^{-9}=\frac{13144}{3^7}+\frac{5^2}{2^2\cdot3^{11}}=\frac{13144\cdot2^2\cdot3^4+5^2}{2^2\cdot3^{11}}=6\frac{28537}{2834352}=6.010095\approx6\frac{1}{100}=6.01$	$\frac{601}{900}$	3.495	699.07	−0.005
太簇	$157464=2^3\cdot3^9$	$2^3\cdot3^9\times3^{-9}=2^3=8$	$2^3\cdot3^9+\frac{7153}{36}\times2$	$157861\frac{7}{18}=11\times14351+\frac{7}{2\cdot3^2}$	$(11\times14351+\frac{7}{2\cdot3^2})\times3^{-9}=\frac{14351\cdot11}{3^9}+\frac{7}{2\cdot3^{11}}=\frac{14351\cdot2\cdot11\cdot3^2+7}{2\cdot3^{11}}=8.020189\approx8\frac{1}{50}=8.02$	$\frac{401}{450}$	0.998	199.59	−0.002
南吕	$104976=2^4\cdot3^8$	$2^4\cdot3^8\times3^{-9}=2^4\cdot3^{-1}=5\frac{1}{3}=5.333333$	$2^4\cdot3^8+\frac{7153}{36}\times3$	$105572\frac{1}{12}=4\times26393+\frac{1}{2^2\cdot3}$	$(4\times26393+\frac{1}{2^2\cdot3})\times3^{-9}=\frac{2^2\cdot26393}{3^9}+\frac{1}{2^2\cdot3^{10}}=\frac{2^4\cdot3\cdot26393+1}{2^2\cdot3^{10}}=\frac{1266865}{236196}=5\frac{85885}{236196}=5.363617\approx5\frac{9}{25}=5.36$	$\frac{134}{225}$	4.485	897.23	−0.015
姑洗	$139968=2^6\cdot3^7$	$2^6\cdot3^7\times3^{-9}=2^6\cdot3^{-2}=7\frac{1}{9}=7.111111$	$2^6\cdot3^7+\frac{7153}{36}\times4$	$140762\frac{7}{9}=2\times70381+\frac{7}{3^2}$	$(2\times70381+\frac{7}{3^2})\times3^{-9}=\frac{2\times70381}{3^9}+\frac{7}{3^{11}}=\frac{2\cdot3^2\cdot70381+7}{3^{11}}=\frac{1266865}{177147}=7\frac{26836}{177147}=7.151490\approx7\frac{3}{20}=7.15$	$\frac{143}{180}$	1.992	398.38	−0.008
应钟	$93312=2^7\cdot3^6$	$2^7\cdot3^6\times3^{-9}=2^7\cdot3^{-3}=4\frac{20}{27}=4.740740$	$2^7\cdot3^6+\frac{7153}{36}\times5$	$94305\frac{17}{36}=3\times5\times6287+\frac{17}{2^2\cdot3^2}$	$(3\times5\times6287+\frac{17}{2^2\cdot3^2})\times3^{-9}=\frac{5\cdot6287}{3^8}+\frac{17}{2^2\cdot3^{11}}=\frac{6287\cdot2^2\cdot3^3\cdot5+17}{2^2\cdot3^{11}}=\frac{3394997}{708588}=4\frac{560645}{708588}=4.791214\approx4\frac{79}{100}=4.79$	$\frac{479}{900}$	5.459	1091.88	−0.041
蕤宾	$124416=2^9\cdot3^5$	$2^9\cdot3^5\times3^{-9}=2^9\cdot3^{-4}=6\frac{26}{81}=\frac{2\cdot13}{3^4}=6.320988$	$2^9\cdot3^5+\frac{7153}{36}\times6$	$125608\frac{1}{6}=2^3\times15701+\frac{1}{2\cdot3}$	$(2^3\times15701+\frac{1}{2\cdot3})\times3^{-9}=\frac{2^3\cdot15701}{3^9}+\frac{1}{2\cdot3^{10}}=\frac{2^4\cdot15701\cdot3+1}{2\cdot3^{10}}=\frac{753649}{118098}=6\frac{45061}{118098}=6.381556\approx6\frac{19}{50}=6.38$	$\frac{319}{450}$	2.978	595.64	−0.022
大吕	$165888=2^{11}\cdot3^4$	$2^{11}\cdot3^4\times3^{-9}=2^{11}\cdot3^{-5}=8\frac{104}{243}=8\frac{2^3\cdot13}{3^5}=8.427984$	$2^{11}\cdot3^4+\frac{7153}{36}\times7$	$167278\frac{31}{36}=2\times83639+\frac{31}{2^2\cdot3^2}$	$(2\times83639+\frac{31}{36})\times3^{-9}=\frac{2\cdot83639}{3^9}+\frac{31}{2^2\cdot3^{11}}=\frac{2^3\cdot3^2\cdot83639+31}{2^2\cdot3^{11}}=\frac{6022039}{708588}=8\frac{353335}{708588}=8.4986\approx8\frac{49}{100}=8.49$	$\frac{283}{300}$	0.505	100.99	+0.005
夷则	$110592=2^{12}\cdot3^3$	$2^{12}\cdot3^3\times3^{-9}=2^{12}\cdot3^{-6}=5\frac{451}{729}=5.618656$	$2^{12}\cdot3^3+\frac{7153}{36}\times8$	$112181\frac{5}{3^2}$	$(112181+\frac{5}{9})\times3^{-9}=\frac{112181}{3^9}+\frac{5}{3^{11}}=\frac{3^2\cdot112181+5}{3^{11}}=\frac{1009634}{177147}=5\frac{123899}{177147}=5.699413\approx5\frac{69}{100}=5.69$	$\frac{569}{900}$	3.969	793.8	−0.031

（续表）

律名	三分损益法律数	各项 $\times 3^{-9}$ 求旧律数振动体长度（寸）	何承天算法	新律律数	各项 $\times 3^{-9}$ 求新律数振动体长度（寸）	相对波长	全音数	音分数	与12平均律的差数
夹钟	$147456 = 2^{14}\cdot 3^{2}$	$2^{14}\cdot 3^{2}\times 3^{-9} = 2^{14}\cdot 3^{-7} = 7\frac{1075}{2187} = 7\frac{5^{2}\cdot 43}{3^{7}} = 7.4915409$	$2^{14}\cdot 3^{2} + \frac{7153}{36}\times 9$	$149244\frac{1}{4} = 3\times 2^{2}\times 12437 + \frac{1}{4}$	$(3\times 2^{2}\times 12437 + \frac{1}{4})\times 3^{-9} = \frac{2^{2}\cdot 12437}{3^{8}} + \frac{1}{2^{2}\cdot 3^{9}} = \frac{2^{4}\cdot 3\cdot 12437 + 1}{2^{2}\cdot 3^{9}} = \frac{596977}{78732} = 7\frac{45853}{78732} = 7.582 \approx 7\frac{29}{50} = 7.58$	$\frac{379}{450}$	1.486	297.27	-0.014
无射	$98304 = 2^{15}\cdot 3^{1}$	$2^{15}\cdot 3^{1}\times 3^{-9} = 2^{15}\cdot 3^{-8} = 4\frac{6524}{6561} = \frac{2^{2}\cdot 7\cdot 233}{3^{8}} = 4.9943606$	$2^{15}\cdot 3^{1} + \frac{7153}{36}\times 10$	$100290\frac{17}{2\cdot 3^{2}} = 2\times 3\times 5\times 3343 + \frac{17}{3\cdot 2^{2}}$	$(2\times 3\times 5\times 3343 + \frac{17}{18})\times 3^{-9} = \frac{2\times 5\times 3343}{3^{8}} + \frac{17}{2\cdot 3^{11}} = \frac{2^{2}\cdot 3^{3}\cdot 5\cdot 3343 + 17}{2\cdot 3^{11}} = \frac{1805247}{354294} = 5\frac{139}{1458} = 5.095336 \approx 5\frac{19}{200} = 5.095$	$\frac{51}{90}$	4.925	980.56	-0.075
仲吕	$131072 = 2^{17}$	$2^{17}\times 3^{-9} = 2^{17}\cdot 3^{-9} = 6\frac{12974}{19683} = 6\frac{2\cdot 6487}{3^{9}} = 6.659147$	$2^{17} + \frac{7153}{36}\times 11$	$133257\frac{23}{36} = 3\times 44419 + \frac{23}{2^{2}\cdot 3^{2}}$	$(3\times 44419 + \frac{23}{2^{2}\cdot 3^{2}})\times 3^{-9} = \frac{44419}{3^{8}} + \frac{23}{2^{2}\cdot 3^{11}} = \frac{2^{2}\cdot 3^{3}\cdot 44419 + 23}{2^{2}\cdot 3^{11}} = \frac{4797275}{708588} = 6\frac{545747}{708588} = 6.770189 \approx 6\frac{77}{100} = 6.77$	$\frac{677}{900}$	2.465	492.92	-0.035
黄钟	$174762\frac{2}{3} = 2^{19}\cdot 3^{-1}$	$2^{19}\cdot 3^{-1}\times 3^{-9} = 2^{19}\cdot 3^{-10} = 8\frac{51896}{59049} = 8\frac{2^{3}\cdot 13\cdot 499}{3^{10}} = 8.878863$	$2^{0}\cdot 3^{11} + \frac{7153}{36}$	$177147 = 2^{0}\cdot 3^{11}$	$2^{0}\cdot 3^{11}\times 3^{-9} = 9$	1	0	0	

表36　按半音顺序排列：

生律顺序	0	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
校正值		+0.005	-0.002	-0.014	-0.008	-0.035	-0.022	-0.005	-0.031	-0.015	-0.075	-0.041
律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
律数（寸）	9寸	8.49	8.02	7.58	7.15	6.77	6.38	6.01	5.69	5.36	5.095	4.79
相对波长	1	$\frac{283}{300}$	$\frac{401}{450}$	$\frac{379}{450}$	$\frac{143}{180}$	$\frac{677}{900}$	$\frac{319}{450}$	$\frac{601}{900}$	$\frac{569}{900}$	$\frac{134}{225}$	$\frac{51}{90}$	$\frac{479}{900}$
全音数	0	0.505	0.998	1.486	1.992	2.465	2.978	3.495	3.969	4.485	4.925	5.459

其中第4次生律$\frac{143}{180}$可以进一步分解为$\frac{11\times 13}{180}$，第6次生律$\frac{319}{450}$可以进一步分解为$\frac{11\times 29}{450}$。表35中最后一列与十二平均律的差数最大为0.075全音（14.9音分），最小为0.002全音（0.41音分）。

何承天新律的基本方法也是按三分损益法，但在八度内进行调整而获得一个十分逼近十二平均律的结果。他的调整方法是将差额平均分配在十二律长度上，这种新律体现了朴素趋匀观念自觉地向数理靠拢，但理论上是错误的（因为他是用振动体长度的均匀差数添加到各律，不符合音越高，差数越小的道理）。由于十二长度均差新律中音高差数最大的是无射律，所以说，何承天的新律只是效果上很接近，但从实用上说不是准确的十二平均律。

二、刘焯律

刘焯是隋代581～618年间人，当过参议律历等咨询性的官吏，《隋书·卷十六·律历志》记载了他于公元604年提出的一种律制，他的计算法是：

> 其黄钟管六十三为实，以次每律减三分，以七为寸法。约之，得黄钟长九寸，太簇长八寸一分四厘，林钟长六寸，应钟长四寸二分八厘七分之四。①

按照刘焯的生律办法，十二律由低到高依次相生出来，故下表按半音顺序排列：

表37

12律顺序	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
律名	黄	大	太	夹	姑	仲	蕤	林	夷	南	无	应	清黄钟
刘焯算法	$\frac{63}{7}$	$\frac{63-3}{7}$	$\frac{63-6}{7}$	$\frac{63-9}{7}$	$\frac{63-12}{7}$	$\frac{63-15}{7}$	$\frac{63-18}{7}$	$\frac{63-21}{7}$	$\frac{63-24}{7}$	$\frac{63-27}{7}$	$\frac{63-30}{7}$	$\frac{63-33}{7}$	$\frac{63-36}{7}$
振动体长度	9尺	$8.57\frac{1}{7}$	$8.14\frac{2}{7}$	$7.71\frac{3}{7}$	$7.28\frac{4}{7}$	$6.85\frac{5}{7}$	$6.42\frac{6}{7}$	6	$5.57\frac{1}{7}$	$5.14\frac{2}{7}$	$4.71\frac{3}{7}$	$4.28\frac{4}{7}$	$3.85\frac{5}{7}$
相邻两律长度差		0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43	0.43
相对波长	1	$\frac{857}{900}$	$\frac{407}{450}$	$\frac{257}{300}$	$\frac{1457}{1800}$	$\frac{343}{450}$	$\frac{643}{900}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{557}{900}$	$\frac{257}{450}$	$\frac{157}{300}$	$\frac{143}{300}$	$\frac{193}{450}$
全音数		0.42	0.87	1.34	1.83	2.35	2.91	3.51	4.15	4.85	5.61	6.41	7.33
与平均律之差		-.08	-.13	-.16	-.17	-.15	-.09	+.01	+.15	+.35	+.61	+.91	+1.33

其中第2次生律$\frac{407}{450}$可以进一步分解为$\frac{11\times37}{450}$；第11次生律$\frac{143}{300}$可以进一步分解为$=\frac{11\times13}{300}$。上表中除了林钟与黄钟之间是一个精确的纯五度关系，其他各律的相对波长都是很复杂的数，音的高度非常混乱，应钟已经高于纯八度，所谓“清黄钟”只是生律顺序排列出来的，比清黄钟高约小三度，其实质与清黄钟完全无关。

刘焯律数完全背离了生律的自然法则，设计63这个数只是为了获得黄钟长九寸这个传统，依次减三的结果使12律间长度形成均差关系，以为长度的均差与音程的等差一致。这种误解与以为匀孔或匀品就是平均律的误解是一样的。如上梳理可以清楚看出，刘焯律数说明刘焯本人在观念上有对平均律的自觉追求。但由于科学认识的局限，他对“半音”所做的数理规定不符合声学原理，只是为了维护传统的黄钟九寸。他也不了解音程相加的本质是比值相乘，所以犯了声学和律学的常识性错误。他所提出的律制只是历史上探索平均律历程中的一个失败个案。

---

① 《隋书·卷十六·律历志》。

第六节　王朴新律及其他

一、对三分损益法巧妙变革的王朴新律

王朴为五代 907 ~ 960 年间之人，研究律学和天文历法，周世宗显德六年（公元 959 年），王朴提出一种新律，与前面的律制皆不同。他自己将其表述为：

……九者，成数也，是以黄帝吹九寸之管，得黄钟之声，为乐之端也。半之，清声也。倍之，缓声也。三分其一以损益之，相生之声也。十二变而复黄钟，声之总数也。乃命之曰十二律。旋迭为均，均有七调，合八十四调，播之于八音，著之于歌颂。……

……以上下相生之法推之，得十二律管。以为众管互吹，用声不便，乃作律准，十三弦宣声，长九尺张弦，各如黄钟之声。以第八弦六尺，设柱为林钟；第三弦八尺，设柱为太簇；第十弦五尺三寸四分，设柱为南吕；第五弦七尺一寸三分，设柱为姑洗；第十二弦四尺七寸五分，设柱为应钟；第七弦六尺三寸三分，设柱为蕤宾；第二弦八尺四寸四分，设柱为太吕；第九弦五尺六寸三分，设柱为夷则；第四弦七尺五寸一分，设柱为夹钟；第十一弦五尺一分，设柱为无射；第六弦六尺六寸八分，设柱为仲吕；第十三弦四尺五寸，设柱为黄钟之清声。十二律中，旋用七声为均，为均之主者，宫也，徵、商、羽、角、变宫、变徵次焉，发其均主之声，归乎本音之律，七声迭应布不乱，乃成其调。均有七调，声有十二均，合八十四调，歌奏之曲，由之出焉。①

王朴新律目的很明确，为了旋迭为均，合八十四调。他的生律方法仍是以三分损益法为基础，但他明确了"倍"、"半"的音律关系："半之，清声也。倍之，缓声也。"设定清黄钟律数为黄钟律数的一半。这种做法纠正了固守三分损益法不能生出纯正八度的缺陷，比之以往所有追求黄钟还原的尝试，有了一个突破性进步，而这个突破性进步正在于他有对弦长规律的实践把握。由于半律清黄钟比原本依循三分损益法求出的清黄钟律数长出 0.06，于是，在生南吕和姑洗两律时，将分母 3 缩小，并通过四舍五入，保持小数点后两位，使这两律的长度分别比三分损益法求出的长度增加 0.01 尺和 0.02 尺，其后各律仍用三分损益法。而长度也随之加长。此法当时被称为"新法"。王朴并没有告诉我们他缩小的比例是多少，有学者曾经根据这段文献提供的数据求出了缩减分母的约率值，② 他们的探

---

①《旧五代史·卷一百四十四·志七·乐志下》，《二十五史》。

② 陈应时发表于 1989 年第 2 期《交响》的论文《再谈王朴律》，提出了两种缩减分母的数值，即在求南吕时，将原来的分母 3 减去$\frac{3}{500}$、求姑洗时，分母 3 减去$\frac{1}{500}$；同年《黄钟》第 3 期上发表了郑荣达的文章《王朴密率解》，认为只用一个约率值，即分母 3 减去 500000/749785，经过这样的调节，就可以得到王朴律的结果。陈应时在《中国音乐》1992 年第 2 期的《律学四题》中称道郑先生这种求公比值的做法，对自己的约率值重新修订为$\frac{1}{250}$，很显然，这个数值比例关系更简单。不过，陈先生没有提供这个数的计算公式。这个学术讨论的个案，后来陈先生记录在他的学术文集《中国乐律学探微》一书中，详见第 489 页。

索方法很有启发意义。不过，他们都没有提供求解的途径。在此，我们设计这样一个求解方案：

根据已知的条件，太簇生南吕，太簇律数为8，南吕的王朴律数为5.34，设8x＝5.34

$$\chi=\frac{534}{800}=\frac{534\cdot 2^4\cdot 5^4}{800\cdot 2^4\cdot 5^4}=\frac{6675}{10000}=\frac{89\cdot 3\cdot 5\cdot 5}{2^4\cdot 5^4}=\frac{89}{133.333}$$

王朴用这样一个跃迁算子生出南吕、姑洗两律。

利用倒数的倒数来求分母：

$$x=\frac{89}{133.3333}=\frac{1}{\frac{133.33}{89}}=\frac{2\cdot 1}{\frac{2\cdot 133.333\cdot\frac{90}{89}}{89\cdot\frac{90}{89}}}=\frac{2}{\frac{269.66}{90}}=\frac{2}{\frac{270-0.4}{90}}=\frac{2}{3-\frac{4}{900}}$$

因而得出分母缩小$\frac{4}{900}$这样的结果。将这个结果带入计算，得到的数据与王朴律数相同。

表38

	律名	从旧律数得弦长	王朴算法	王朴算法求弦长	比原长度增加	相对波长	全音数	音分数
0	黄钟	9尺	9	9尺		1	0	0
1	林钟	6尺	$9\times\frac{2}{3}$	6尺		$\frac{2}{3}$	3.51	701.95
2	太簇	8尺	$6\times\frac{4}{3}$	8尺		$\frac{8}{9}$	1.0195	203.91
3	南吕	5.33尺	$8\times\frac{2}{3-\frac{4}{900}}=5.341246$	5.34尺	+1分	$\frac{89}{150}$	4.5185	903.70
4	姑洗	7.11尺	$5.34\times\frac{4}{3-\frac{4}{900}}=7.130563$	7.13尺	+2分	$\frac{713}{900}=\frac{23\times 31}{900}$	2.016	403.23
5	应钟	4.74尺	$7.13\times\frac{2}{3}=4.753333$	4.75尺	+1分	$\frac{19}{36}$	5.532	1106.40
6	蕤宾	6.32尺	$4.75\times\frac{4}{3}=6.333333$	6.33尺	+1分	$\frac{211}{300}$	3.046	609.26
7	大吕	8.43尺	$6.33\times\frac{4}{3}=8.44$	8.44尺	+1分	$\frac{211}{225}$	0.5561	111.22
8	夷则	5.62尺	$8.44\times\frac{2}{3}=5.626666$	5.63尺	+1分	$\frac{563}{900}$	4.0607	812.15
9	夹钟	7.49尺	$5.63\times\frac{4}{3}=7.506666$	7.51尺	+2分	$\frac{751}{900}$	1.5667	313.33
10	无射	4.99尺	$7.51\times\frac{2}{3}=5.006666$	5.01尺	+1分	$\frac{167}{300}$	5.0707	1014.14
11	仲吕	6.66尺	$5.01\times\frac{4}{3}=6.68$	6.68尺	+2分	$\frac{167}{225}$	2.5805	516.09
12	清黄钟	4.44尺	（直接倍半相生）$9\times\frac{1}{2}$ （仲吕三分损一生清黄钟）$6.68\times\frac{2}{3}=4.5333\approx 4.5$	4.5尺	+6分	$\frac{1}{2}$	6	1200

表 39 十二律由低到高按半音顺序排列：

生律顺序	0 12	7	2	9	4	11	6	1	8	3	10	5
与平均律之差	0	+.056	+.02	+.07	+.02	+.08	+.046	+0.01	+.06	+.0185	+.07	+.032
律名	黄 清黄	大	太	夹	姑	仲	蕤	林	夷	南	无	应
振动体长度	9尺 4.5尺	8.44	8	7.51	7.13	6.68	6.33	6	5.63	5.34	5.01	4.75
相对波长	1 $\frac{1}{2}$	$\frac{211}{225}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{751}{900}$	$\frac{713}{900}$	$\frac{167}{225}$	$\frac{211}{300}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{563}{900}$	$\frac{89}{150}$	$\frac{167}{300}$	$\frac{19}{36}$
全音数	0 6	0.556	1.02	1.57	2.02	2.58	3.046	3.51	4.06	4.519	5.07	5.532
与纯律的差数		-.004		-.01		-.02	-.004		-.01		-.02	
音程值		纯律大半音		纯律小三度		纯律宽四度	纯律减五度		纯律小六度		纯律小七度	

从上表中的数据可以看出，王朴新律追求平均律的目标是很清楚的，所用的方法由于改变了分母，长度比值变化，其实质形成一种“跃迁”。在八度内调整各律的基本方法虽然早在何承天时就已经运用，但王朴的算法从物理意义上来说更为合理。王朴新律的结果有六律与纯律更接近，最大差数不足 3.5 音分，但很难因此而判断为王朴是在探索纯律。因为他的动机是为了解决“旋迭为均”，使十二均八十四调“归乎本音之律”。

二、蔡元定十八律

南宋蔡元定（公元 1135 ~ 1198 年）提出了“十八律”理论。

【宋史·志第八十四·乐六】《变律篇》曰：十二律各自为宫，以生五声二变。其黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟六律，则能具足。至蕤宾、大吕、夷则、夹钟、无射、仲吕六律，则取黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟六律之声，少下，不和，故有变律。律之当变者有六：黄钟、林钟、太簇、南吕、姑洗、应钟。变律者，其声近正律而少高于正律，然后洪纤、高下不相夺伦。变律非正律，故不为宫。……何承天、刘焯讥房之病，乃欲增林钟已下十一律之分，使至仲吕反生黄钟，还得十七万七千一百四十七之数，则是惟黄钟一律成律，他十一律皆不应三分损益之数，其失又甚于房。①

① 《宋史上·卷一百三十一·乐志第八十四·乐六》，《二十五史》第 401 页。

蔡元定认为何承天等人的新律“惟黄钟一律成律，他十一律皆不应三分损益之数，其失又甚于房。”他主张以三分损益法生出十二律后，继续加生六律，称为“变律”，由于非为正律，所以不能当宫均。根据他的表述，我们制表如下：

表 40

生律序号	律名	三分损益	律数	相对波长	质底幂积	全音数	音分数
0	黄钟		177147	1	$2^0 \cdot 3^0$	0	0
1	林钟	$\times\frac{2}{3}$	118098	$\frac{2}{3}$	$2^1 \cdot 3^{-1}$	3.51	701.95
2	太簇	$\times\frac{4}{3}$	157464	$\frac{8}{9}$	$2^3 \cdot 3^{-2}$	1.02	203.91
3	南吕	$\times\frac{2}{3}$	104976	$\frac{16}{27}$	$2^4 \cdot 3^{-3}$	4.53	905.86
4	姑洗	$\times\frac{4}{3}$	139968	$\frac{64}{81}$	$2^6 \cdot 3^{-4}$	2.04	407.82
5	应钟	$\times\frac{2}{3}$	93312	$\frac{128}{243}$	$2^7 \cdot 3^{-5}$	5.55	1109.77
6	蕤宾	$\times\frac{4}{3}$	124416	$\frac{512}{729}$	$2^9 \cdot 3^{-6}$	3.06	611.73
7	大吕	$\times\frac{4}{3}$	165888	$\frac{2048}{2187}$	$2^{11} \cdot 3^{-7}$	0.57	113.68
8	夷则	$\times\frac{2}{3}$	110592	$\frac{4096}{6561}$	$2^{12} \cdot 3^{-8}$	4.08	815.64
9	夹钟	$\times\frac{4}{3}$	147456	$\frac{16384}{19683}$	$2^{14} \cdot 3^{-9}$	1.59	317.59
10	无射	$\times\frac{2}{3}$	98304	$\frac{32768}{59049}$	$2^{15} \cdot 3^{-10}$	5.1	1019.55
11	仲吕	$\times\frac{4}{3}$	131072	$\frac{131072}{177147}$	$2^{17} \cdot 3^{-11}$	2.61	521.51
12	变黄钟	$\times\frac{4}{3}$	$174762\frac{2}{3}$	$\frac{524288}{531441}$	$2^{19} \cdot 3^{-12}$	0.12	23.46
13	变林钟	$\times\frac{2}{3}$	$116508\frac{4}{9}$	$\frac{1048576}{1594323}$	$2^{20} \cdot 3^{-13}$	3.63	725.41
14	变太簇	$\times\frac{4}{3}$	$155344\frac{16}{27}$	$\frac{4194304}{4782969}$	$2^{22} \cdot 3^{-14}$	1.14	227.37
15	变南吕	$\times\frac{2}{3}$	$103563\frac{5}{81}$	$\frac{8388608}{14348907}$	$2^{23} \cdot 3^{-15}$	4.65	929.33
16	变姑洗	$\times\frac{4}{3}$	$138084\frac{20}{243}$	$\frac{33554432}{43046721}$	$2^{25} \cdot 3^{-16}$	2.156	431.28
17	变应钟	$\times\frac{2}{3}$	$92056\frac{40}{729}$	$\frac{67108864}{129140163}$	$2^{26} \cdot 3^{-17}$	5.67	1133.24

其实蔡元定提出的“十八律”比起前边已有的各种尝试，并无真正新意，他仍是沿用京房之法，所以上表以黄钟大数起始。但在解决“还宫”的问题上，蔡元定并没有实际的作为，他本人称“十二律各自为宫，以生五声二变”，并强调“变律”不为宫，所以，这十八律的构想，目的很明确，只是要保证在十二律各律上有完备的七声相“和”，并不是追求十二律旋相为宫的理想。从这个意义上说，他沿用京房之法，却不明白京房之法的科学价值，所以止于实用生出十八律，而没有解决“旋相为宫”问题的远大理想；批评何、刘等人悖离三分损益法，皆因他自己的思维禁锢于三分损益法，不思更新突破，故而既不能理解“何承天新律”在思维方法上的飞跃及合理性，也不能认清楚刘焯错误的根源所在。

表 41“蔡元定十八律”十二均之“五声二变”结构关系：

均序		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	生律顺序	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
	校正值		+.01	+.02	+.03	+.04	+.05	+.06	+.07	+.08	+.09	+.10	+.11	+.12	+.13	+.14	+.15	+.16	+.17
	律名 / 均	黄	林	太	南	姑	应	蕤	大	夷	夹	无	仲	变黄	变林	变太	变南	变姑	变应
12	仲吕												(						)
11	无射											(						)	
10	夹钟										(						)		
9	夷则									(						)			
8	大吕								(						)				
7	蕤宾							(						)					
6	应钟						(						)						
5	姑洗					(						)							
4	南吕				(						)								
3	太簇			(						)									
2	林钟		(						)										
1	黄钟	(						)											

从这个表中可以看出十二均每均七声的结构和音高差数是一致的。从第 7 均开始用变律，至第 12 均，除了均主仲吕，其他各律都超出十二律，这就是蔡氏所谓“变律不为宫”。

第七节　琴律学

至晚从汉代末年起，古琴的形状就基本上是现代这个样子：七根弦，琴面外侧有 13 个徽位。虽然在先秦文献中没有表明琴律数理逻辑关系的记载，但《国语·周语》中记载周景王（公元前 544 ~ 520 在位）时的乐官伶州鸠说过“度律均钟”，三国吴韦昭注释“均钟”是先秦使用的一种弦律正律器。

一、琴上十三徽的律学内涵

尽管人们很早就已经运用琴律的律制规范，古琴的徽位与取音方法足可证明这一点。但由于缺少清晰的文献记载，我们无法在前边的章节中讨论。从北宋人崔遵度（953 ~ 1020 年）和沈括等对十三徽所作的论述，可以见到这种传自世世代代琴工的实践总结已经上升为律学研究。

【琴笺】世之传琴者，必曰长三尺六寸象朞之日，十三徽象朞之月，居中者象闰，伏羲以来未有甚辨者。至唐协律郎刘贶谓之乐之盲（旨）也，其详杳冥无得而言焉。又以乐器配诸节候，而谓琴为夏至之音。于泛声，卒无述者，愚尝病之。

因以张弓附案，泛其弦而十三徽声具焉，况琴之弦乎！是知非所谓象者，盖天地自然之节耳，又岂止夏至之音而已。①

【梦溪笔谈·补笔谈】弦之有十三泛韵，此十二律自然之节也。盈丈之弦，其节亦十三；盈尺之弦，其节亦十三，故琴以为十三徽。不独弦如此，金石亦然。②

这两段文字中的“泛声”、“泛韵”就是现代所说的“泛音”。“天地自然之节”表明了弦振动会产生一系列谐音的物理道理，也就是现代声学中所说的“节点”（node）。“金石亦然”的结论说明，作者已经不但从经验性的观察，了解弦振动的规律，对其他任何振动体与音律之间的自然关系应该也有理性认识，才会得出这样的论断。自他们提出“自然之节”后，南宋朱熹（1130～1200年）首次明确提出“琴律说”，将琴律的长期实践引入到理论律学研究。

1. 安徽法

朱熹在《琴律说》中概要介绍了古代琴工世代相传的确定徽位的“摺纸法”，亦名为“安徽法”，具体为“四折取中为法”。在明人蒋克谦编撰的《琴书大全》一书中，也有专文描述“安徽法”。由于《琴书大全》一书为蒋氏高祖、祖父、父亲及他本人数代揖录、代代拓充，故而资料丰富，而蒋氏高祖是嘉靖皇太后的父亲，因此被认为可能揖有内府材料（即蒋克谦序言中所提到的“往牒”），所载曲谱皆来自当时的古籍，因而来源悠久，又参互考订，分门析类，纤悉无遗，是故价值颇高。此书蒐集古代各家指法很多，可以弥补另一部重要琴学文献《西麓堂琴统》③ 所载曲谱多而指法说明残缺之遗憾。这本书受重视的另外一个原因是，此书为万历年间的精刻本，而另一本琴学著作《永乐琴书集成》的子目与此书相同，但为写本，用的工料也不是永乐年间的，疑为明代书商伪作也未可知。由于上述理由，《琴书大全》这本书的文献价值是毋庸置疑的。

【琴书大全·琴制九·安徽法】一法自岳至龈均分为二，其折断处为琴之半。为至中处正是七徽，为立徽之本。又以其二各均分之，其折断处又为半，为中，其在上者为四徽，其在下者为十徽。又以其所分之半，自四徽至岳，自十徽至龈各均分之，其折断处又皆为半，为中，在四徽之上者为一徽，十徽之下者为十三徽。又至岳至龈均分为五，以五之中，其两端之折断处为附近于七之中，在七徽上者为六徽，在七徽下者为八徽。又自六徽上至岳，自八徽下至龈均分之，其折断处又各为半，为中，在四徽上者为三徽，在十徽下者为十一徽。又自岳至龈均分为三，以三之中，其两端之折断处亚于六与八之为附近于七之中，在六之上者为五徽，在八之下者为九徽。又自五徽至岳，九徽至龈均分之，其折断处又各为

---

① 《琴苑要录》，宋人辑，明代抄本。1925年冯水据铁琴铜剑楼藏本抄，第74页。另见《琴书大全第一卷·序琴十·崔遵度琴笺》，万历庚寅年（1590年）蒋克谦刊本。

②《梦溪笔谈·补笔谈·卷一·乐律》

③ 《西麓堂琴统》成书于1549年。

半为中，在三徽上者为二徽，在十一徽下者为十二徽。此法比前说较明白因附于此以务参考。①

“安徽法”被朱载堉在《律学新说》中更清楚地解释为：

> 盖琴家自岳山至龙龈二者间，用纸一条，作为四折，以定四徽、七徽、十徽；作为五折，以定三徽、六徽、八徽、十一徽；作为六折，以定二徽、五徽、七徽、九徽、十二徽。首末两徽，乃四徽折半也。此法最为简易。若以算法定之，则置琴长若干为实，四归得四徽，一倍即七徽，二倍即十徽也。五归得三徽，一倍即六徽，二倍即八徽，三倍即十一徽也。六归得二徽，一倍即五徽，二倍即七徽，三倍即九徽，四倍即十二徽也。八归得一徽，七因之即十三徽也。②

即把与琴弦同长的纸条依次折二、三、四、五、六、八等分，取其“折”点为徽位，以琴面正中，即二分之一处为中心（七徽），两边对称地以三、四、五、六、八等分设徽，如此便可以知道十三徽之间的弦长比例和相对音高。

2. 十三徽的律学规定

根据“安徽法”所介绍的弦长划分规定，从岳山到龙龈这段长度全弦振动，即散声，相对弦长表述为1，其他各徽按音的相对弦长就是小于1的数，我们可以计算出一弦上各徽的相对弦长：

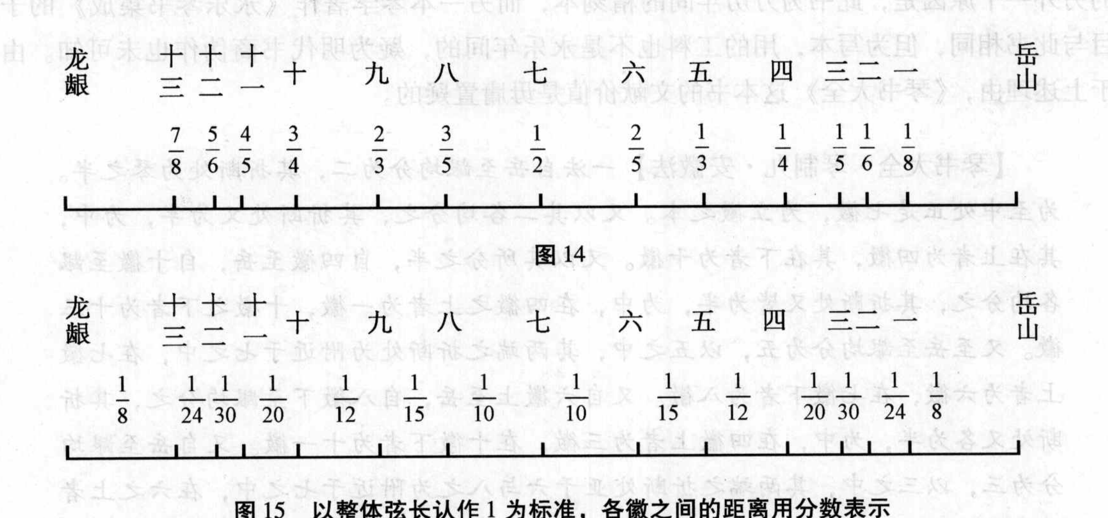


图14

图15 以整体弦长认作1为标准，各徽之间的距离用分数表示

---

①《琴书大全第四卷·琴制九·安徽法》，万历庚寅岁蒋克谦刊本。笔者标点。

② 引自《律学新说·卷之一·论准徽与琴徽不同第十》，“归”为珠算术语，称一位除数的除法。在这里“四归”即“四分”。详见《律学新说》［明］朱载堉撰，冯文慈点注，人民音乐出版社出版，1986年9月北京第1版，第71页。

古琴有七条长度相同的弦，所以必须将相对弦长的概念转化为相对波长概念，才能在一个完整的系统下表述不同音高的七根弦以及每弦十三徽的所有按音，建立起相对音程关系。

转换的途径是这样的：

一弦散声相对波长为 1，各徽位的相对弦长乘以散声相对波长，写成公式为：

某徽相对波长 = 散声相对波长 × 某徽相对弦长

根据这个公式，可以制定出一弦琴律表。

表 42　一弦琴律表

校正值			+.16	+.08	-.07	-.01	+.01	-.08		-.07	+.01		-.07	+.01	
借用记谱															
相对音高		0	1.16	1.58	1.93	2.49	3.51	4.42	6	7.93	9.51	12	13.93	15.51	18
徽位编号			十三	十二	十一	十	九	八	七	六	五	四	三	二	一
相对波长	散声	1													
	二等分者								$\frac{1}{2}$						
	三等分者						$\frac{2}{3}$				$\frac{1}{3}$				
	四等分者					$\frac{3}{4}$			$\frac{2}{4}$			$\frac{1}{4}$			
	五等分者				$\frac{4}{5}$			$\frac{3}{5}$		$\frac{2}{5}$			$\frac{1}{5}$		
	六等分者			$\frac{5}{6}$			$\frac{4}{6}$		$\frac{3}{6}$		$\frac{2}{6}$			$\frac{1}{6}$	
	八等分者		$\frac{7}{8}$			$\frac{6}{8}$			$\frac{4}{8}$			$\frac{2}{8}$			$\frac{1}{8}$

表中的徽位排列顺序保持与琴面的徽位排列方向相一致，从表中可以看到三徽、六徽、八徽、十一徽以及十二徽按音都得到纯律音程，十三徽按音得到特大二度。在十三徽上若以泛音技术演奏，表 42 中所有分母相同的徽位音高都相同，即弦的分段（2、3、4、5、6、8 等分，分子皆为 1）振动；若以按音演奏，则是由于掐住节点，剩下的有效弦长振动而产生的音高，这里的原理与印度人关注弦长掐段率、波斯和阿拉伯人的量音原理是相同的。

有了一弦上的十三徽划分，还需要建立起七弦的定弦规范，这个渐趋成熟的过程反映在琴学文献中。朱熹曾提过两种定弦法，分别记载在《宋史·乐志》和《琴律说》中，这两种方法都包含着局部的逻辑矛盾，透露出琴律学理论在形成过程中，与实践冲突和整合的发展轨迹。在后期的琴学文献《五知斋琴谱》①、《琴学入门》② 中记录的操作步骤表现出定弦法已

① 《五知斋琴谱》成书于 1667 年前后，刊印于 1721 年。

② 《琴学入门》成书于 1864 年。

经有了很清晰的内在逻辑。由于每个古琴徽位按音都表达了非常准确的相对弦长，所以在琴学文献中以文字叙述或谱字表示的“某弦与某弦某徽相应”，就很容易用现代律学的表述体系转述。以下将顺序介绍，对隐含在文言描述背后的律学本质予以本质与现象的双重剖析。

二、文献中记载的定弦法

1. 朱熹所传的两种定弦法

《琴律说》中的定弦法

朱熹（1130～1200年）在《琴律说》中介绍的定弦法，其中存在着逻辑矛盾：

> 盖九徽之宫，隔二者生散徵，而散徵隔一上生十徽之商。九徽之商隔二下生散羽，而散羽隔一上生十一徽之角。九徽之角隔二下生散少宫，而散少宫隔一上生十徽之徵。九徽之徵隔二下生散少商，而散少商隔一上生十徽之羽也。

这段话的意思可以转译如下：

（1）一弦为宫，其九徽与相隔两弦的第四弦散声相应，四弦散声为徵；

（2）第四弦散声与相隔一弦的二弦十徽相应，二弦散声为商；

（3）二弦九徽与相隔两弦的第五弦散声相应，五弦散声为羽；

（4）五弦散声与相隔一弦的第三弦十一徽相应，三弦散声为角（此角为清角）；

（5）三弦九徽与相隔两弦的第六弦散声相应，六弦散声为少宫；

（6）六弦散声与相隔一弦的第四弦十徽相应；

（7）第四弦九徽与相隔两弦的七弦散声相应，七弦散声为少商；

（8）第七弦散声与相隔一弦的五弦十徽相应，五弦散声为羽。

已知的条件是，一弦散声的相对弦长为1，九徽相对弦长为$\frac{2}{3}$，十徽相对弦长为$\frac{3}{4}$，十一徽相对弦长为$\frac{4}{5}$。据此，可作律学解析如下：

（1）第四弦散声相对波长＝一弦散声相对弦长$\times\frac{2}{3}=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

（2）第四弦散声相对波长＝第二弦散声相对波长$\times\frac{3}{4}$；

第二弦散声相对波长$=\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}=\frac{8}{9}$

（3）第五弦散声相对波长＝第二弦散声相对波长$\times\frac{2}{3}=\frac{8}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$

（4）第五弦散声相对波长＝第三弦散声相对波长$\times\frac{4}{5}$；

第三弦散声相对波长$=\frac{16}{27}\div\frac{4}{5}=\frac{20}{27}$

（5）第六弦散声相对波长＝第三弦散声相对波长$\times\frac{2}{3}=\frac{20}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{40}{81}$

（6）第六弦散声相对波长＝第四弦散声相对波长$\times\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

（7）第七弦散声相对波长＝第四弦散声相对波长$\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

（8）第七弦散声相对波长 = 第五弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4} = \frac{16}{27} \times \frac{3}{4} = \frac{4}{9}$

根据第六个条件，六弦相对波长与一弦为倍半关系，再返回去验证第五个条件中三弦的相对波长，第三弦散声相对波长 $= \frac{1}{2} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$。

将上述结果整理为表格，可以清楚看出第三、六两弦各有两种结果。

表 43

校正值	±0	+.02	-.01	+.10	+.01	-.08	±0	+.11	-.09
借用记谱									
相对音高	0	1.02	2.49	2.6	3.51	4.53	6	6.11	702
借用唱名	Do	Rai	Fa	Fa	So	La	Do	Do	Rai
弦序号	一	二	三	三	四	五	六	六	七
散声相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{4}{9}$

这样两种结果各有其存在的合理性。在第四、五两个条件中，根据第五弦散声 La 继续生律得到第三弦散声 Fa，第六弦散声 Do，这三弦之间正好构成了一个纯律大三和弦模式：

表 44

借用唱名	Fa	La	Do
弦 序 号	三	五	六
散声相对波长	$\frac{20}{27}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{40}{81}$

$$= \frac{60}{81} : \frac{48}{81} : \frac{40}{81}$$

$$= \left(\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6}\right) \times \frac{81}{240}$$

括号里的分数连比式正是我们早已熟悉的大三和弦的模式。这样定弦可以满足三、五、六弦演奏和音的需要。但同时却造成另一个矛盾：一弦与三弦、一弦与六弦相互之间都不协和，特别是一弦与六弦之间倍、半关系被破坏了。

而根据第六个条件，根据第四弦求出第六弦与第一弦为倍、半关系，第六弦散声相对波长为$\frac{1}{2}$，三弦九徽与六弦散声相应，三弦散声相对波长$\frac{3}{4}$与一弦也互相协和。这种在一套定弦法中存在着的数理矛盾正反映了理论摸索阶段的困惑。

《宋史·乐志》中的定弦法

《宋史·乐志》中记载了朱熹所传的另一种定弦法，其中也存在着逻辑矛盾。

【宋史·志第九十五·乐十七】每疑七弦隔一调之，六弦皆应于第十晖，而第三弦独于第十一晖调之乃应。……其六弦会于十晖，则一与三者，角与散角应也；二与四者，徵与散徵应也；四与六者，宫与散少宫应也；五与七者，商与散少商应也；其第三、第五弦会于十一晖，则羽与散羽应也。

虽然“正调”是以三弦为宫，但传统上，琴家历来按弦的顺序，将第一弦称为“宫”，其后依次称为商、角、徵、羽、少宫、少商。所以在上面这段文字中，给定了一个明确条件，即每间隔一弦，两条弦之间，一弦为散声，另一弦十徽按音相应，除了第五弦与第三弦十一徽按音相应。“则一与三者，角与散角应也”，应该理解为一弦上的清角音与三弦散声相应，这里的“角”实为“清角”。从这段文字可以判断，对于一弦与六弦之间的倍、半关系，已是不言自明的，所以不必刻意强调一弦与六弦倍、半相应。一弦第十徽相对弦长为$\frac{3}{4}$，第十一徽相对弦长为$\frac{4}{5}$，根据这几点，可以将以上条件整理如下，顺序稍做调整。

（1）一与三者，角（清角）与散角（散清角）应也：

（散清角）三弦散声相对波长 = 一弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4} = 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

（2）二与四者，徵与散徵应也：

（散徵）四弦散声相对波长 = 二弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4}$；$\frac{2}{3}$ = 二弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4}$

二弦散声相对波长 $= \frac{2}{3} \div \frac{3}{4} = \frac{8}{9}$

（3）四与六者，宫与散少宫应也：

（散少宫）六弦散声相对波长 = 四弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4}$；$\frac{1}{2}$ = 四弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4}$

四弦散声相对波长 $= \frac{1}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{3}$

（4）其第三与第五弦会与十一晖（徽），则羽与散羽应也：

（散羽）五弦散声相对波长 = 三弦散声相对波长 $\times \frac{4}{5} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{3}{5}$；

（5）五与七者，商与散少商应也：

（散少商）七弦散声相对波长 = 五弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4} = \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{20}$

将上述各弦的推算结果列表显示如下：

表45

校正值		+.02	-.01	+.01	-.08		-.09
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.49	3.51	4.42	6	6.91
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$

这个定弦法所构成的音阶，前六弦或后五弦并不存在数理矛盾，但第二弦与第七弦之间的倍、半关系却被破坏了。第二弦音高的确定是通过 Fa、Do、So、Rai 连续的纯四、五度相生获得；第七弦则是由 Fa、La、Rai 的小三和弦关系调出（即“其三与第五弦会与十一徽……五与七者”两句调出）。将三、五、七三弦关系列表如下：

表 46

借用唱名	Fa	La	Rai
弦序号	三	五	七
散声相对波长	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{20}$
=	$\frac{15}{20}$:	$\frac{12}{20}$:	$\frac{9}{20}$
=	（5 :	4 :	3）$\times\frac{3}{20}$

括号里的比例式正是我们早已熟悉的小三和弦的第一转位模式。

这种定弦法在古代有一定的代表性，不只是朱熹叙述了这样的定弦法，宋代姜夔也运用这种定弦法，在《太音大全集》（刊印于 1413 年）中也提到了同样的定弦法。

以上两种定弦法，都表明了在琴学理论的摸索中，存在着阶段性的认识局限，缺少理论与实践的贯通，所以才会有这种顾此失彼的数理逻辑错误。

2.《五知斋琴谱》中记载的调弦法

《五知斋琴谱·调弦法·卷一》①：……先用大间，散挑七弦，而左大指按四弦九徽，……先以七、四两弦于九徽扣准，籍此作主，更不可改动。次用小间，散挑六弦，名指按四弦于十徽，宽紧只六弦收放，而四不动也。次又挑七弦，名指按五弦于十徽，又五弦收放，……七不动矣。四、五、六、七皆已和准，方用大间挑六弦。按三弦于九徽、或挑五弦、名指按三弦于十徽八分应之。宽紧只宜收放三弦，……再用中指托七弦，中指按二弦于七徽。泛音实音皆可。宽紧动二弦。六一②两弦亦如之。

这段话介绍了调弦的方法：

（1）七弦散声应四弦九徽按音；

（2）六弦散声应四弦十徽按音；

（3）七弦散声应五弦十徽按音；

① 《五知斋琴谱》徐琪编，康熙六十年（1721 年）首次刊印，本文引自雍正二年（1724 年）红杏山房藏版影印版，卷一金十二——十五。

② 原文为“六二”，校勘为“六一”。

(4) 六弦散声应三弦九徽按音；

(5) 五弦散声应三弦十徽八分按音；

(6) 七弦散声应二弦七徽按音；

(7) 六弦散声应一弦七徽按音。

根据已知的条件，一弦的相对波长为1，从表42中可以查到一弦各徽的相对波长，按以下顺序求各弦：

(7) 六弦散声相对波长 = 一弦散声相对波长 × 一弦七徽相对弦长 $=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(2) 六弦散声相对波长 = 四弦散声相对波长 × 一弦十徽相对弦长

四弦散声相对波长 = 六弦散声相对波长 ÷ 一弦十徽相对弦长 $=\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$

(1) 七弦散声相对波长 = 四弦散声相对波长 × 一弦九徽相对弦长 $=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

(3) 七弦散声相对波长 = 五弦散声相对波长 × 一弦十徽相对弦长

五弦散声相对波长 = 七弦散声相对波长 ÷ 一弦十徽相对弦长 $=\frac{4}{9}\div\frac{3}{4}=\frac{16}{27}$

(4) 六弦散声相对波长 = 三弦散声相对波长 × 一弦九徽相对弦长

三弦散声相对波长 = 六弦散声相对波长 ÷ 一弦九徽相对弦长 $=\frac{1}{2}\div\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$

(6) 七弦散声相对波长 = 二弦散声相对波长 × 一弦七徽相对弦长

二弦散声相对波长 = 七弦散声相对波长 ÷ 二弦七徽相对弦长 $=\frac{4}{9}\div\frac{1}{2}=\frac{8}{9}$

整理以上结果，七弦的定弦关系如下表。

表47

校正值		+.02	-.01	+.01	+.03		+.02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.49	3.51	4.53	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

从这个整理的结果来看，这个正调的调弦方案完全以三分三倍生律法为数理规范。上文中第五个条件：五弦散声应三弦十徽八分按音，说明三弦十徽八分的按音相对波长与五弦散声为同一音高。

既然已经得到各弦散声的相对波长，那么每弦上的十三徽位按音的相对波长也就不难求出。只要将表42中的数值依次乘以各弦的散声相对波长，就可以秩序井然地列出古琴七条弦的散声相对波长、每弦上十三徽音位的相对波长以及琴五调变化后的相对波长。以表42为模型，根据表47的数据，可以逻辑相生出7张表格。

3.《琴学入门》中记载的定弦法

《琴学入门·调和弦法》：初安五弦以不松不紧为度，松则安至第一弦太慢无声，紧则安至第七弦太急而断。再安六弦，如滚按拨，左手名指按位，大指拨其散按两弦是也，以次皆然。先按五弦十二晖，次拨六弦散声及五弦按音，两相应为准。如音在五弦十二晖上相应，则六弦散声紧，宜松；在十二晖下相应，则六弦散声松，宜紧矣。次安七弦，其松紧以与五弦十晖相应为准。此五六七弦逐一拴于右边雁足，然后安一弦，按其八晖，与五弦散声相应为准。如按应在晖上，则散弦紧而按弦松，宜紧按弦；应在晖下，则散弦松而按弦紧，宜松按弦。次安二弦，按二弦九晖，与五散声相应。次安三弦，按三弦十一晖，与五弦散声相应。次安四弦，按四弦十三晖，与五弦散声相应。或按四弦十晖，与六弦散声相应。①

这段介绍的调弦法与《五知斋琴谱》中的记载有较大区别，数次提到与某弦十二徽、十一徽、八徽相应，甚至要与十三徽相应，这意味着该文献的律学规范是以纯律为主，甚至超越了纯律的范围。关于与十三徽相应的要求暂且略过，先根据上文分析这样的定弦结果。

根据给定的条件，可以理出这样的头绪：

（1）六弦散声应五弦十二徽按音；

（2）七弦散声应五弦十徽按音；

（3）五弦散声应一弦八徽按音；

（4）五弦散声应二弦九徽按音；

（5）五弦散声应三弦十一徽按音；

（6）六弦散声应四弦十徽按音。

仍然从已知条件入手，先求与一弦某徽相应的弦，同样，从表42中查到一弦各徽的相对波长，按如下顺序求各弦：

（3）五弦散声相对波长＝一弦散声相对波长×一弦八徽相对弦长＝$1\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$

（2）七弦散声相对波长＝五弦散声相对波长×一弦十徽相对弦长＝$\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{20}$

（1）六弦散声相对波长＝五弦散声相对波长×一弦十二徽相对弦长＝$\frac{3}{5}\times\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$

（6）六弦散声相对波长＝四弦散声相对波长×一弦十徽相对弦长

四弦散声相对波长＝六弦散声相对波长÷一弦十徽相对弦长＝$\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}=\frac{2}{3}$

（5）五弦散声相对波长＝三弦散声相对波长×一弦十一徽相对弦长

三弦散声相对波长＝五弦散声相对波长÷一弦十一徽相对弦长＝$\frac{3}{5}\div\frac{4}{5}=\frac{3}{4}$

（4）五弦散声相对波长＝二弦散声相对波长×一弦九徽相对弦长

二弦散声相对波长＝五弦散声相对波长÷一弦九徽相对弦长＝$\frac{3}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{9}{10}$

① 同治三年刻本，《琴学入门·调和弦法·十二——十四》。

整理以上结果，七弦的定弦关系如下表。

表 48

校正值		-.09	-.01	+.01	-.08		-.09
借用记谱							
相对音高	0	0.91	2.49	3.51	4.42	6	6.91
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{10}$

与《五知斋琴谱》中记载的调弦法相比，第二、五、七弦有不同的规范。二、三、五、七诸弦正好符合纯律小三度的律学规范。对这几弦可以做出这样的律学分析：

表 49

借用唱名	Rai	Fa	La	Rai
弦 序 号	二	三	五	七
散声相对波长	$\frac{9}{10}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{20}$
	$= \frac{18}{20}$:	$\frac{15}{20}$:	$\frac{12}{20}$:	$\frac{9}{20}$
	= (6 :	5 :	4 :	3) $\times\frac{3}{20}$

括号里的比例式正是我们早已熟悉的小三和弦的模式。

从整理的结果来看，《琴学入门》中记载的正调调弦方案是以三分三倍及五分生律法为数理规范。这是自《淮南子》以来，又一则明确的纯律理论的文献记载。虽然在早前的《琴律说》中已经有纯律的定弦步骤，但由于整个步骤中存在着内在的逻辑矛盾，所以，作为严密的理论表述，当推这部文献。如果说《淮南子》律数中出现纯律因素有其偶然性，那么，这个文献则完全应该视为理性的提炼，是一则关于纯律理论与实践的详确史料。

从一些琴谱中的音律分析和对现代琴人的采访调查，这两种调弦法仍然存在于现实生活中。

根据以上两段文献记载，我们得知琴的“正调”有两种律学内涵，而以“正调”为基础的紧、慢某弦的琴五调定弦，每种调也都可能产生一或两种规格的定弦结果。

4．琴五调的定弦方法

前文已经提到，在“正调”的基础上，通过紧、慢某弦或某若干弦会得到多种定弦方案。这些定弦方案基本是以“清角为宫”和“变宫为角”这两种连续旋宫方式；还有一类特殊变体，调出来的七弦散声音阶不合常规的五声音阶规范。

以紧某弦为特征的“清角为宫”式调弦方案

以紧某弦为特征的“清角为宫”式调弦方案有紧五弦的“清羽调”，也称“金羽调”、“今羽调”、“蕤宾调”；紧二、五、七弦的“夹钟调”，也称“姑洗调”、“清商调”。在《风宣玄品》和《太音大全集》中都记载了相关的调弦步骤。按照《五知斋琴谱》和《琴学入门》所记述的不同定弦方案，按照文献中所介绍的步骤，可以求出各调的定弦，有的调就存在着两种规定。以下逐一列出各种定弦结果，律学解析过程略去。

（1）清羽调。紧五弦

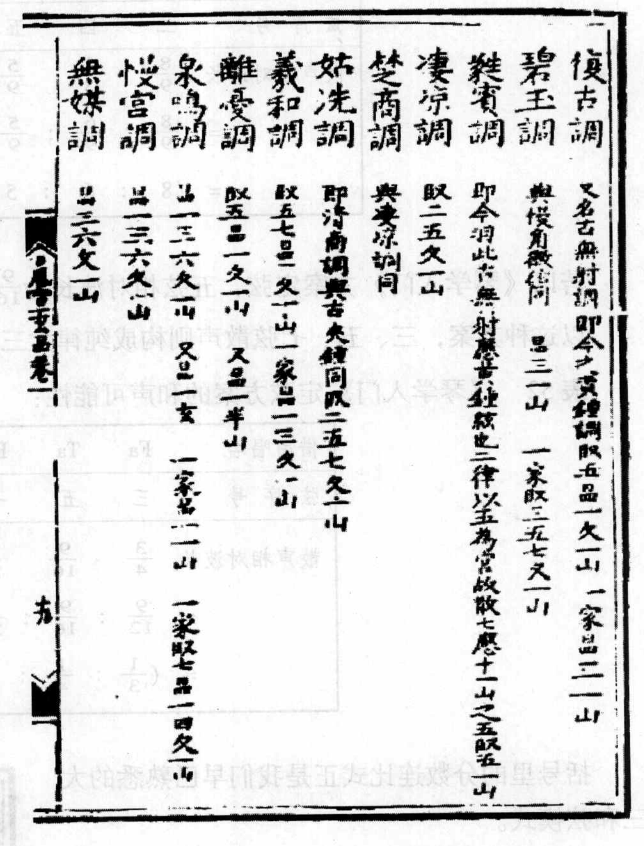
《风宣玄品·卷一·琴调徽弦·外调转弦》记载了定弦的关键步骤：

将文中谱字翻译为：“蕤宾调：即今羽，此古无射应黄钟弦也，二律以五为宫，故散七应十一徽之五，紧五一徽。”①

根据“散七应十一徽之五”这个条件，可以写出等式：

七弦散声相对波长 = 五弦散声相对波长 × $\frac{4}{5}$

五弦散声相对波长 = 七弦散声相对波长 ÷ $\frac{4}{5} = \frac{4}{9} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{9}$



倣古調 又名古無射調即今之黄鍾調

碧玉調 與慢角徵音同

蕤賓調 即今羽此古無射應黄鍾絃也二律以五為宮故散七應十一之五

凄涼調

楚商調 與凄涼調同

姑洗調 即清商調與古夾鍾同

義和調

離憂調

泉鳴調

慢宮調

無媒調

風宣玄品卷一

九

图16 《风宣玄品》

表50 以《五知斋琴谱》方案定弦

校正值		+.02	−.01	+.01	+.09		+.02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.49	3.51	5.09	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Fa	So	Ta	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

① 《风宣玄品·卷一·琴调徽弦》，江安傅越凡抄自嘉靖十八年（1539年）原刻本，1931年抄。

以这种方案，二、四、五、七弦散声会构成纯律小三和弦：

表 51 《五知斋琴谱》定弦方案的和声可能性：

借用唱名	Rai	So	Ta	Rai
弦序号	二	四	五	七
散声相对波长	$\frac{8}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$
	$=\frac{8}{9}$:	$\frac{6}{9}$:	$\frac{5}{9}$:	$\frac{4}{9}$
	$=(8$:	6 :	5 :	$4)\times\frac{1}{9}$

若以《琴学入门》方案定弦，五弦相对波长为$\frac{9}{16}$。

以这种方案，三、五、七弦散声则构成纯律大三和弦：

表 52 《琴学入门》定弦方案的和声可能性：

借用唱名	Fa	Ta	Rai
弦序号	三	五	七
散声相对波长	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{9}{20}$
	$=\frac{9}{12}$:	$\frac{9}{16}$:	$\frac{9}{20}$
	$=(\frac{1}{3}$:	$\frac{1}{4}$:	$\frac{1}{5})\times\frac{9}{4}$

括号里的分数连比式正是我们早已熟悉的大三和弦模式。

（2）清商调。紧二、五、七弦

《风宣玄品》记载了定弦的关键步骤：

将图中减字谱文字翻译为陈述性文字："清商调：紧二、五各一徽又紧七弦，一家慢一、三、四、六各一徽。"这两句话透露的信息是，紧二、五、七弦与慢一、三、四、六弦可以看做同一个调。但这只是实践上的一种认识，就律学意义而言，这二者之间即有共同之处，又有不同之处。

《神奇秘谱·霞外神品下卷·姑洗调》中记载："姑洗调：神品姑洗意，即清商意，与古夹钟同，紧二、五、七各一徽。散挑七，名十勾五应；散挑七，大八九勾四应；散挑四，

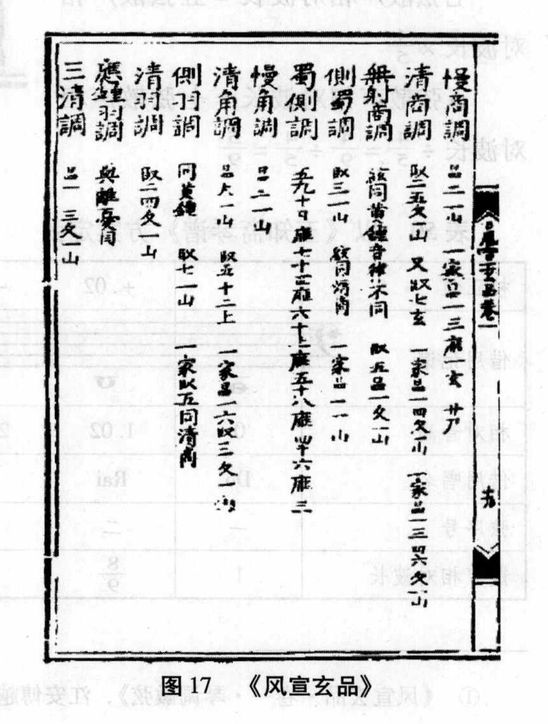


图 17 《风宣玄品》

名十一勾二应。”①

《西麓堂琴统》记载：“夹钟调：紧二、五、七各一徽，此夹钟弦也，俗谓清商调。按夹钟、姑洗以二为宫，故以散四应十一徽之二。姑洗调：紧二、五、七各一徽。转弦法：……以散七应十徽之五，以散五应十徽之三，以散四应十一徽之二。”②

这两个文本中都强调了四弦散声应二弦十一徽，这是非常关键的一步，可以解析为：

四弦散声相对波长 = 二弦散声相对波长 $\times \frac{4}{5}$

二弦散声相对波长 = 四弦散声相对波长 $\div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$

七弦散声的相对波长以倍、半关系求得，为 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{12}$

根据七弦散声相对波长 = 五弦散声相对波长 $\times \frac{3}{4}$

五弦散声相对波长 = 七弦散声相对波长 $\div \frac{3}{4} = \frac{5}{12} \div \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$

表 53

校正值		+.08	-.01	+.01	+.09		+.08
借用记谱							
相对音高	0	1.58	2.49	3.51	5.09	6	7.58
借用唱名	Do	Mai	Fa	So	Ta	Do	Mai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$

第二、四、五、七弦散声正好构成纯律大三和弦：

表 54

借用唱名	Mai	So	Ta	Mai
弦序号	二	四	五	七
散声相对波长	$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{12}$

$$= \frac{10}{12} : \frac{10}{15} : \frac{10}{18} : \frac{10}{24}$$

$$= \left(\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8}\right) \times \frac{10}{3}$$

① 《神奇秘谱》成书于 1425 年，本书所引《琴曲集成》第一册第 164 页。此处已将减字谱转译为文字叙述。

② 《西麓堂琴统·卷四十·夹钟·二十二》明刻本，现收入《琴曲集成》第三册，此处已将减字谱转译为文字叙述。

以慢某弦为特征的“变宫为角”式调弦方案

以慢某弦为特征的“变宫为角”式调弦方案有慢三弦的“慢角调”，又称“碧玉调”；慢一、三、六弦的“慢宫调”，又称“泉鸣调”、“夷则调”。《太音大全集》、《神奇秘谱》、《西麓堂琴统》都记载过相关的定弦步骤，通过对文献的解读，可以得到各调的定弦结果。

（3）慢角调。慢三弦

《神奇秘谱·霞外神品下卷·碧玉调》记载：“碧玉调：慢三一徽，散挑五，名十勾三应。”① 意即五弦散声与三弦十徽相应；《西麓堂琴统》则记载三弦散声与一弦十一徽相应②。根据这两种条件，可以调出两种结果来。

① 以《五知斋琴谱》定弦方案为基础，用五弦散声与三弦十徽相应。

五弦散声相对波长 = 三弦散声相对波长 × $\frac{3}{4}$

三弦散声相对波长 = $\frac{16}{27} \div \frac{3}{4} = \frac{64}{81}$

表 55　慢角调七弦

校正值		+.02	+.04	+.01	+.03		+.02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	2.04	3.51	4.53	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Mi	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

② 以《五知斋琴谱》定弦方案为基础，用三弦散声与一弦十一徽相应。

三弦散声相对波长 = 一弦散声相对波长 × $\frac{4}{5} = 1 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$

表 56　慢角调七弦

校正值		+.02	−.07	+.01	+.03		+.02
借用记谱							
相对音高	0	1.02	1.93	3.51	4.53	6	7.02
借用唱名	Do	Rai	Mi	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

---

① 见《琴曲集成》第一册第 153 页。此处已将减字谱转译为文字叙述。

② 《西麓堂琴统·卷二十四·无媒调曲谱·五》，据减字谱转译。

③ 以《琴学入门》定弦方案为基础，兼用两种方法。

表 57　慢角调七弦

校正值		-.09	-.07	+.01	-.08		-.09
借用记谱							
相对音高	0	0.91	1.93	3.51	4.42	6	6.91
借用唱名	Do	Rai	Mi	So	La	Do	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{20}$

(4) 慢宫调。慢一、三、六弦

《西麓堂琴统》记载了定弦的过程："夷则调：慢一、三、六各一徽。此古夷则也，俗谓之慢宫调。按夷则、南吕以四弦为宫，故散六应十一徽①之四。泉鸣调：慢一、三、六各一徽。散挑三，中九勾一应。散挑五，名十勾三应。散挑六，名十一勾四应。"根据对原文的分析，"慢宫调"只能在《琴学入门》的定弦方案基础上获得。

表 58　慢宫调七弦

校正值	-.06	-.09	-.07	+.01	-.08	-.06	+.02
借用记谱							
相对音高	-0.56	0.91	1.93	3.51	4.42	5.44	7.02
借用唱名	Ti	Rai	Mi	So	La	Ti	Rai
弦序号	一	二	三	四	五	六	七
散声相对波长	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{9}$

从以上对相关文献的梳理，能够清楚地看出，随着时间的推移，文献中记载的方法呈现出从对律制的不确定到做出确切选择，以保证定弦符合严密的逻辑规范。

① 原文误为十二徽，现校勘为十一徽。见《西麓堂琴统·卷十九·夷则·十二》，根据减字谱转译为叙述文字。

三、暗徽的设置

1. 纯律规范的徽外音

古琴上除了这十三明徽，还有很多按音指位，这就是暗徽，最早的存谱《碣石调幽兰》中已经有“暗徽”这个名词。从文献记载来看，“暗徽”是由少渐多的。《琴书大全》中辑录了晚唐琴家陈拙（约公元9世纪时人）《琴籍》中的《明徽暗徽法》。其中提到在十三明徽的每两徽间，可以从五种音位中选用，即为“徽近上、徽中间、徽近下、中间上少许、徽中间下少许，当应二十三暗徽也”，加在一起，明徽暗徽共有三十六徽，此外，还有两暗徽，分别是从一徽到岳山、十三徽到龙龈二者间匀分为五段，取近徽一段，前者称“上暗徽”，只用作泛音；后者称“下暗徽”。即“徽外”，按、泛音皆用。

《琴书大全·琴徽·琴徽三·明徽暗徽法》：

凡指按弦对徽，为应必先明二十三暗徽与十三明徽共为三十六分，上中下按之。折徽法云，三折相目七四一，从岳裹至龙龈裹折回中心定为七徽，名曰下清一十二徽。再从七徽至岳折回中心定为四徽，名曰中平清一十二徽。又从四徽至岳折回中心定为一徽，名曰上极清一十二徽，分为三倍。黄钟之声，谱中写徽近上、徽中间、徽近下、徽中间上少许、徽中间下少许，当应二十三暗徽也。夫声之清浊，大小相应，皆是明徽暗徽所生，故七弦应徽所以取声和也。除三十六徽外，别有二暗徽。至岳匀分五段，取近徽一段，正谓之上暗徽，名曰徽外，唯泛使之；十三徽至龈匀分五段，取近（徽）一段，正谓之下暗徽，亦名徽外，举按泛声使之。《秋思弄》中上暗徽上独泛一声，《神人畅》中上下暗徽上各泛一声。两谱泛声皆名神授声。《幽馆操》中上下暗徽上独泛一声。①

由于只有这两个音位是对暗徽的最明确表述，我们也可以对此做出律学分析：

“下暗徽”相对弦长

＝十三徽相对弦长＋［（全弦弦长－十三徽相对弦长）÷5］

$=\frac{7}{8}+\left[\left(1-\frac{7}{8}\right)\div 5\right]=\frac{7}{8}+\left(\frac{1}{8}\div 5\right)=\frac{7}{8}+\frac{1}{40}=\frac{35+1}{40}=\frac{9}{10}$

此暗徽的律学规定是按音为小全音，相对音高＝0.91全音；泛音为三个八度又纯律大三度，即相对波长为$\frac{1}{10}$，相对音高为$3\times6+1.93=19.93$全音。

“上暗徽”相对弦长

＝一徽相对弦长 － 一徽相对弦长÷5

$=\frac{1}{8}-\frac{1}{8}\div5=\frac{1}{8}-\frac{1}{40}=\frac{5-1}{40}=\frac{1}{10}$

泛音音高为19.93全音。

---

① 见《琴书大全·第六卷·琴徽·琴徽三·明徽暗徽法》，笔者标点。

相对弦长为$\frac{9}{10}$的徽外音，距离十三徽的绝对弦长为一寸一分二厘五，这个音在《碣石调·幽兰》中被描述为“十三外一寸许”①。

（图18《碣石调·幽兰》谱局部“幽兰第五”，第二行有“十三下一寸许”，第三行为“十三外一寸许”。）

图18

2.《琴统·十则》中的明暗徽及三分损益律的徽外音

徐理的《琴统·十则》（1268年成书）中进一步提出“琴有十则，节四十五，同者十有四，得位者三十有一。夫十数者天地生成之。”② 对每一则都做出尺寸或徽位的详细解说。这31个音位中除了13个明徽，还有18个暗徽。

在这十则中对弦长的划分增加了七等分、九等分和十等分。根据这个提示，我们仍然可以逐一解析：

第七则原文：“七而分之各得六寸四分二厘八毫余四。”将弦长等分为七，可得到$\frac{1}{7}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{3}{7}$、$\frac{4}{7}$、$\frac{5}{7}$、$\frac{6}{7}$各个节点，如果只是用做泛音，相对音高为16.84全音 =12 +4.84全音；若用于按音，$\frac{5}{7}$的相对音高为2.91全音；$\frac{6}{7}$的相对音高为1.33全音，介于第十二、十三徽间。

第九则原文：“九而分之各得五寸。”将弦长等分为九，则得到新的按音相对弦长$\frac{5}{9}$，相对音高为5.09全音、$\frac{7}{9}$的相对音高为2.18全音。同时，还有一个三分损益律的徽外音$\frac{8}{9}$。这个“徽外音”距离十三徽的绝对长度为六分二厘五，在《碣石调幽兰》中被描述为“十三下半寸许”。

第十则原文：“十而分之各得四寸五分。”将弦长等分为十，则得到新的按音节点，相对弦长为$\frac{7}{10}$，相对音高为3.09全音，介于第九、十徽间。

十三徽设置中不用七等分，反映出音律探索中的理性选择。徐理《十则》虽然得出了更多的弦长比规定，但从方法论而言，并无新意。只是循着十三明徽的设置思路，机械地连续等分，虽然出现了七分七倍生律，但既不能说是出于系统化、理论化的律制构建，也难说是出于明确的音乐实践要求。而从各家琴谱来看，徐理的《十则》并没有对音乐实践产生太多影响。

符合三分损益律和纯律两种规范的徽外音在演奏的实践中，有各自相谐的徽位，“十三下半寸许”之徽外音在后来强调五度相生律为重的音乐实践中用的更为广泛。

---

① 详见《琴曲集成》（一），中华书局1980年影印本，第4页

② 引自《西麓堂琴统·琴声卷一·十二》。

3. 十分法的徽分

对于琴演奏中所用的徽间音位，清代以前的琴谱没有清晰统一的命名法。《碣石调·幽兰》中有时以两徽间来表示音位，如“九十间”，意为在第九、第十两徽间取音；或是以长度描述来表示音位，如“八上一寸许”或“上半寸许”，意为第八徽向右上约一寸或半寸取音。比较起来，这一种记谱更精确。《碣石调·幽兰》谱和陈拙《琴籍·明徽暗徽法》中反映出在每两徽间有五个音位可以选择，如“上豆许”、“上半寸许”、“下半寸许”、“上一寸许”、“下一寸许”或“徽近上、徽中间、徽近下、徽中间上少许、徽中间下少许”等等。而从1673年徐上瀛刊印《大还阁琴谱》起，已经创用了“徽分”，即在每两徽间十等分形成九个区间，这样，原有的五种音位就增加到九种。自此，琴上从岳山到龙龈二者间就有130个音位。虽然实际演奏并不会用到130个音位，但古琴这种乐器所提供的音体系已经被人们完全掌握并以“徽分”运用的技法物化显现出来。常用的就有三分三倍、五分五倍的各种徽分。

四、具有多维生律因素的琴律

从表42可以一目了然地看到，琴律是一种含三分三倍、五分五倍甚至更多生律因素的体系，仅以十三明徽而言，就已经出现了七倍音，而在丰富的徽分音位上，数理规定的多样性包括了在其他章节中提到的各种生律因素。

阿拉伯人所运用的量音理论，在中国古琴上也是古来有之的。虽然十三徽是在发现分段振动的客观规律后，有了理论的引导而设置的，但古琴从来就是以按音为主要演奏技巧，在认识泛音规律的同时，也同样有充分条件观察到在同样的节点处按弦形成于泛音成倍数的音程。按住某徽，剩下的有效弦长可以产生某种音程，如此，也就把握住了长度比变化与音程关系之间的规律。虽然古琴并不用量音术来定弦，但在以量振动段长度来理解音律间的音程关系方面是异曲同工的。

琴工自古相传、确定徽位的“摺纸法”是朴素地用来运算琴律弦长比值的简单整数比的计算方法。产生于公元5～6世纪的琴曲《碣石调幽兰》谱所记录的在13个徽位上广泛运用泛音的事实也证明了古人很早就已使用这种律制。但“琴律”这个律学名词却是迟至南宋，由朱熹在其著作《琴律说》中首次提出。被后世尊为“正调”的调弦，传统上有两种调弦法，一为《管子·地员篇》所记述的五音关系，特征是二弦（相对波长为$\frac{8}{9}$，D）、五弦（相对波长为$\frac{16}{27}$，A）为三分损益法所生；另一种为琴家所传，特征是二弦（相对波长为$\frac{9}{10}$，D）、五弦（相对波长为$\frac{3}{5}$，A）合纯律规范。据考证，这种调弦法至迟在春秋战国期间就已出现了。至清晚期，这种定弦法被详细地记载在《琴学入门》中，在前边的段落已进行了具体的律学分析。这两种调弦法在琴家手中世代相传，从大量琴谱可以看到综合运用的情况。

1. 朱熹《琴律说》

中国历代乐志律志不间断地记载了一直发展的三分损益律理论，而关于琴律的信息却只是散见、且是偶见于零星的经、子之书中，然而琴律的民间理论与实践却一直与占统治地位

的三分损益律平行发展，越来越多的出土资料也证明了这一点。从以琴律为物质基础和理论基础定律的编钟研究以及大量琴学文献的律学解读，琴律理论的发展脉络也渐显明晰。

朱熹（1130～1200年）的《琴律说》第一次把“琴律”这个术语立说于著作中，标志着琴律学终于从实践走向理论的殿堂。他在这部著作中称一弦十一徽（$\frac{4}{5}$，Mi）为姑洗，这个纯律大三度显然不同于三分损益律的姑洗（$\frac{64}{81}$，Mi），在漫长的以三分损益律为权威法则的律学史中，这是第一次明确强调黄钟至姑洗的另一种律学规范。他还提到在一弦之中有下、中、上三准相隔纯八度，五声十二律在上、中、下三准之间为次第八度，① 那么，姑洗在这三准之间分别得自十一徽（$\frac{4}{5}$）、六徽（$\frac{2}{5}$）、三徽（$\frac{1}{5}$）；《琴律说》中有一句话体现了中国式独有的纯律小三度直接生律途径：“五弦则南吕之律因起于龙龈而为羽之初矣，黄清少宫则应于十二。”五弦散声为南吕（La），黄钟应于十二徽（Do），相对弦长为$\frac{5}{6}$，这种传统与曾侯乙编钟测音所体现出的小三度基本上以纯律规范为多是一致的，似乎不能只看做巧合，而应该与钟律以弦定律这个实践相联系。另一个例证是三分损益律仲吕（$\frac{131072}{177147}$，$^{\#}$Mi）不能复生黄钟，而古琴三弦的仲吕（$\frac{3}{4}$，Fa）为三倍反生，可以复生黄钟。这些都说明琴上的律名都具有三分三倍、五分五倍律制的特点。自从淮南律数中出现纯律因素，朱熹《琴律说》是首次明确记载生律因素多样化的琴律的文献。

2.《琴书大全》中留下的详细数据②

在清初创用“徽分”记写徽间音位之前，减字谱关于徽分音位的记写多是模糊的，只是大略表述为在某两徽间。但琴律研究并没有忽略徽间音位的作用，而有关这方面较早和最详细的记载可能要算编撰于明代的《琴书大全》了。

在蒋克谦的时代，虽然还没有“徽分”这个术语，但他对于徽间的弦长计算已经精确到以尺为单位的小数点后第三位——“厘”单位。

由于蒋克谦用文字叙述的方式记写这套经过实验总结得到的计量方法，其间的逻辑关系很难展示出来，这里将以严格的数学形式再现出这部文献中的知识结晶。同时，这套数据也充分体现了琴上多维生律的特征以及运用。

五弦与十二律的对应关系以及反应在一弦上的相对弦长

《琴书大全·卷第二·声律上·十二律五弦还宫要诀·二十四》：

> 先定五弦各为宫所用尺专以朱文公四尺五寸之数约为则
>
> 第一弦自岳至龈，散声为黄钟宫，大吕、太簇共弦，若用共弦之律为宫，其

① 原文为：“……七弦者，一弦之中又各有五声十二律者凡三焉。……若七徽之后以至四徽之前，则五声十二律之应，亦各于其初之次而半之。……四徽之后以至一徽之前，则其声律之应，次第又如其初，而又半之。”《朱子大全集·卷六十六·琴律说》约1190年成书，冯水抄本，中国艺术研究院图书馆藏书。

② 这部分内容引自笔者发表在2003年第3期《音乐艺术》上的一篇独立文章《以现代律学的方法解读蒋克谦〈琴书大全〉中所传以徽间徽外寸分厘数》。

弦法不改，但大吕则诸弦皆紧于黄钟一律，太簇则诸弦皆紧于黄钟二律，后仿此。

第二弦散声与按第一弦正十二徽相应为夹钟宫，姑洗共弦；第三弦散声与按第一弦十徽，于十徽微上声同相应为仲吕宫，蕤宾、林钟共弦；第四弦散声与按第一弦九徽上一寸八分四厘相应为夷则宫，南吕共弦；第五弦散声与按第一弦八徽上二寸相应为无射宫，应钟共弦。

这段话描述了定五弦的过程，他是以一弦的相对弦长规定了其他几弦各自的散声相对波长，即原文中的“第…弦散声与按一弦…徽……相应为……宫”。那么各弦与一弦的关系为：

一弦散声相对波长为黄钟宫

二弦散声相对波长为夹钟宫 ＝ 一弦十二徽的相对弦长

三弦散声相对波长为仲吕宫 ＝ 一弦十徽微上的相对弦长

四弦散声相对波长为夷则宫 ＝ 一弦九徽上一寸八分四厘的相对弦长

五弦散声相对波长为无射宫 ＝ 一弦八徽上二寸的相对弦长

虽然蒋克谦提供的是以绝对弦长数值（朱文公尺四寸五分）表达相对弦长，我们可以将绝对弦长数值折合成相对弦长数值，办法是，设一弦空弦全长（从龙龈到岳山的距离）为1，从某按音（徽位或徽间音位）到岳山的距离是全弦长的几分之几，这个数值就是按音的相对弦长。在第一章第二节中我们已经获得了这样的认识：相对弦长数值（中国古代表达为律数）＝相对波长数值。在面对古琴这样由多根等长的弦在一起比较音程关系时，必须由相对弦长的概念上升到相对波长，在以一弦散声相对波长为1的条件下，各弦各徽位上的音高皆可以在一个逻辑系统内表达。

参照表42中的徽位规定，可以对上述等式右边的按音之绝对弦长作如下折算：

①黄钟律，第一弦散声为宫

绝对弦长为4.5尺，相对弦长为1，相对波长为1；

②夹钟律，第二弦散声为宫

二弦散声相对波长＝一弦散声相对波长×一弦正十二徽的相对弦长 $=1\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6}$

一弦十二徽的绝对弦长 $=4.5$ 尺 $\times\frac{5}{6}=3.75$ 尺

一弦十二徽的相对弦长化为小数0.8333333（由分数化为循环小数）

③仲吕律，第三弦散声为宫

三弦散声相对波长＝一弦散声相对波长×一弦十徽微上的相对弦长 $\approx1\times\frac{3}{4}\approx\frac{3}{4}$

一弦十徽微上的绝对弦长 ≈4.5 尺 $\times\frac{3}{4}\approx3.375$ 尺

一弦十徽微上的相对弦长约为0.75

④夷则律，第四弦散声为宫

四弦散声相对波长＝一弦散声相对波长×一弦九徽上一寸八分四厘的相对弦长

九徽的绝对弦长 $=4.5$ 尺 $\times\frac{2}{3}=3$ 尺

一弦九徽上一寸八分四厘的绝对弦长＝3尺－0.184尺＝2.816尺

相对弦长为2.816尺÷4.5尺=0.625778（由分数化为循环小数，小数点后最后一位四舍五入）

按照琴律定律的一般规范有两个结果（分数化为小数，以便于比大小）：

a. $\frac{5}{8}=0.625$　　b. $\frac{81}{128}=0.6328125$

与蒋氏所传数据相比，取前者$\frac{5}{8}$，八徽相对弦长为0.6，徽分推算过程为：

（0.625－0.6）×15[①]=0.375，写成徽分，即八徽四分；等于一弦八徽四分。

⑤无射律，第五弦散声为宫

五弦散声相对波长=一弦散声相对波长×一弦八徽上二寸的相对弦长

八徽的绝对弦长=4.5尺×$\frac{3}{5}$=2.7尺

一弦八徽上二寸的绝对弦长=2.7尺－0.2尺=2.5尺

相对弦长为=2.5尺÷4.5尺=0.555556（由分数化为循环小数）

按照琴律定律的一般规范有两个结果（分数化为小数，以便于比大小）：

a. $\frac{5}{9}=0.55556$；b. $\frac{9}{16}=0.5625$

与蒋氏所传数据相比，取前者$\frac{5}{9}$，七徽的相对弦长为0.5，徽分推算过程为：

（0.555556－0.5）×10=0.555556，写成徽分，即七徽六分，等于一弦七徽六分。

以上结果用五线谱附加校正值和表格表示：

例8



表59　五弦各为宫，与一弦相应音位

宫弦	律位	相对波长	第一弦绝对弦长	第一弦相对弦长	散声、徽位和徽分
第一弦散声为宫	黄钟	1	4.5尺	1	
第二弦散声为宫	夹钟	$\frac{5}{6}$	3.75尺	$\frac{5}{6}$	一弦十二徽
第三弦散声为宫	仲吕	$\approx\frac{3}{4}$	≈3.375尺	$\approx\frac{3}{4}$	一弦十徽微上
第四弦散声为宫	夷则	$\frac{5}{8}$	2.816尺	$\frac{5}{8}$	一弦八徽四分
第五弦散声为宫	无射	$\frac{5}{9}$	2.5尺	$\frac{5}{9}$	一弦七徽六分

① 参照图15中各徽间的距离，八徽至九徽之间为$\frac{1}{15}$。

如此看来，作者似乎在寻求纯律结果。不过，从《琴书大全·十二律五弦还宫要诀》全文来看，蒋克谦的基本律学观念是以三分损益法为基础的，所以这段文字还有另外的解读可能：

（1）相距“小微音差”而归并入与纯律相同的按音音位

若以三分损益相生十二律，从黄钟出发，二弦散声所应律吕为第9次相生而出的夹钟律，相对波长为$\frac{16384}{19683}$，为一弦十二徽上不足一分，与十二徽按音的相对音高相差只有一个“小微音差”，可以归并为十二徽；

四弦散声所应律吕为第8次相生而出的夷则律，相对波长为$\frac{4096}{6561}$，与相对波长$\frac{5}{8}$的相对音高也只有一个“小微音差”，推算徽分为0.36，也归入一弦八徽四分；

五弦散声所应律吕为第10次相生而出的无射律，相对波长为$\frac{32768}{59049}$，为一弦七徽五分五，与七徽六分按音的相对音高也是只有一个“小微音差”，所以可以归入七徽六分。

（2）相距“古代音差”而不能简单归并

三弦散声所应律吕为第11次相生而出的仲吕律，相对波长为$\frac{131072}{177147}$，为一弦九徽九分，与十徽按音的相对音高相差一个“古代音差”，这个音位不能简单归并于反生一次的十徽。由于当时还没发明出徽分记谱，所以会形成这样的表述，仲吕为“十徽微上”。

以下列表比较两种可能性：

表60　两种律制规范在徽间徽位上的比较

宫弦	律位	相对波长	相对音高	同律位两音之差	第一弦绝对弦长	散声、徽位和徽分
第一弦散声为官	黄钟	1	0		4.5尺	散声
第二弦散声为官	夹钟	$\frac{5}{6}$	1.5782	0.01全音	3.75尺	一弦十二徽
		$\frac{16384}{19683}$	1.588		3.745770尺	一弦十二徽上不足一分
第三弦散声为官	仲吕	$\frac{3}{4}$	2.49	0.12全音	3.375尺	一弦十徽
		$\frac{131072}{177147}$	2.6075		3.32957尺	一弦九徽九分
第四弦散声为官	夷则	$\frac{5}{8}$	4.0684	0.01全音	2.816尺	一弦八徽四分
		$\frac{4096}{6561}$	4.0782		2.809尺	一弦八徽三分六
第五弦散声为官	无射	$\frac{5}{9}$	5.088	0.01全音	2.5尺	一弦七徽六分
		$\frac{32768}{59049}$	5.098		2.497尺	一弦七徽五分五

表中同律位的极小差异清楚表明，在一定的局部内，三分损益律与纯律可以得到一个协调统一。

这段文字经过这样的清理，也显示出一个矛盾：

这段原文规定了只有第二弦散声与一弦正十二徽相应，第四、五弦则与一弦的某徽间音位相应，而第三弦与“第一弦十徽微上”相应，这种表达则令人费解。尽管我们可以认为是在发明徽分记谱之前的含混描述，但比较起其他精确到寸、分、厘的数据，蒋克谦完全有能力计算这个“微上”的精确表达，为什么却独独在这里含混了起来？而况，在早于《琴书大全》的文献《太音大全集》、《西麓堂琴统》中都已运用十徽按音相谐的调弦法，说明琴律实践中运用三倍反生的十徽是非常普遍的。蒋克谦在此处的突然模糊反显得很反常，这个问题留待后文进一步讨论。

各宫弦五声的音律规定

《琴书大全·卷第二·声律上·十二律五弦还宫要诀·二十五》：

次定各宫弦五声

凡即定应为某律宫弦者自岳至龈散声为宫，就本宫弦按十三徽外六分七厘为商；按十一徽上约四分五厘为角；按正九徽为徵；按八徽上约三分五厘为羽。

这段话转写成如下形式：

某律宫弦者

宫音，散声，弦长为4.5尺，相对波长为1；

商音，按十三徽外六分七厘（十三徽相对波长为$\frac{7}{8}$）

绝对弦长＝十三徽绝对弦长（4.5尺×$\frac{7}{8}$）＋0.067尺

＝3.9375尺＋0.067尺＝4.0045尺

相对弦长＝4.0045÷4.5＝0.8898888

按照琴律定律的一般规范有两个结果：

a. $\frac{8}{9}$＝0.888889；　　b. $\frac{9}{10}$＝0.9

与蒋氏所传数据相比，取前者$\frac{8}{9}$。十三徽的相对弦长为0.875，徽分的推算过程为：

（4.0045÷4.5－0.875）×8＝0.119，写成徽分，即十三徽一分，即前文所论的符合三分损益律的下暗徽；

角音，按十一徽上四分五厘

绝对弦长＝十一徽绝对弦长（4.5尺×$\frac{4}{5}$）－0.045尺＝3.6尺－0.045尺＝3.555尺

相对弦长＝3.555÷4.5＝0.79

按照琴律定律的一般规范有两个结果：

a. $\frac{4}{5}$＝0.8　　b. $\frac{64}{81}$＝0.7901234

与蒋氏所传数据相比，取后者$\frac{64}{81}$。十徽的相对弦长为0.75，徽分的推算过程为：

（3.555÷4.5－0.75）×20＝0.8，写成徽分，即十徽八分

徵音，按正九徽

绝对弦长＝4.5尺×$\frac{2}{3}$＝3.0尺

相对弦长 = 3.0 ÷ 4.5 = 0.666666；

羽音，按八徽上三分五厘

绝对弦长 = 八徽绝对弦长（4.5 尺 × $\frac{3}{5}$）− 0.035 尺 = 2.7 尺 − 0.035 尺 = 2.665 尺

相对弦长 = 2.665 ÷ 4.5 = 0.592222

按照琴律定律的一般规范有两个结果：

a. $\frac{3}{5}=0.6$　　b. $\frac{16}{27}=0.5925925$

与蒋氏所传数据相比，取后者$\frac{16}{27}$。七徽的相对弦长为 0.5，徽分的推算过程为：

（2.665 ÷ 4.5 − 0.5） × 10 = 0.9222，写成徽分，即七徽九分。

以上结果用五线谱附加校正值和表格表示：

例 9　某律宫弦五声

校正值：　+.02　+.04　+.01　+.03

相对波长：　1　$\frac{8}{9}$　$\frac{64}{81}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{16}{27}$

表 61　一弦黄钟宫弦五声

阶名	宫弦上的按音位置	绝对弦长（尺）	相对弦长	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	4.5	1	1	散声
商	十三徽外六分七厘	4.0045	0.888889	$\frac{8}{9}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	3.555	0.79	$\frac{64}{81}$	十徽八分
徵	正九徽	3.0	0.666667	$\frac{2}{3}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	2.665	0.59259	$\frac{16}{27}$	七徽九分

此宫弦上的五声实为第一弦黄钟宫五声音阶。

用八度协和而不是用同音协和的办法，将其他四弦套用过来：

例 10　第二弦夹钟宫五声

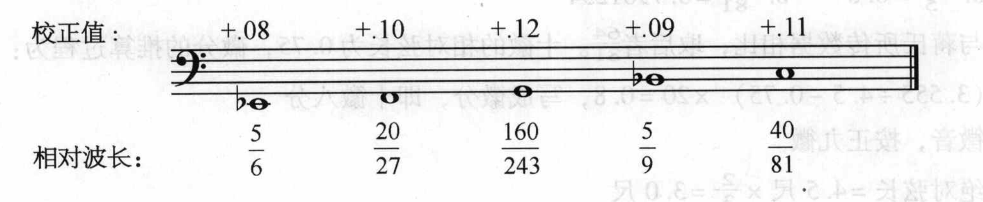


表 62　二弦夹钟宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{5}{6}\times1=\frac{5}{6}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{5}{6}\times\frac{8}{9}=\frac{20}{27}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{5}{6}\times\frac{64}{81}=\frac{160}{243}$	十徽八分
徵	正九徽	$\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	$\frac{5}{6}\times\frac{16}{27}=\frac{40}{81}$	七徽九分

例 11　第三弦仲吕宫五声：

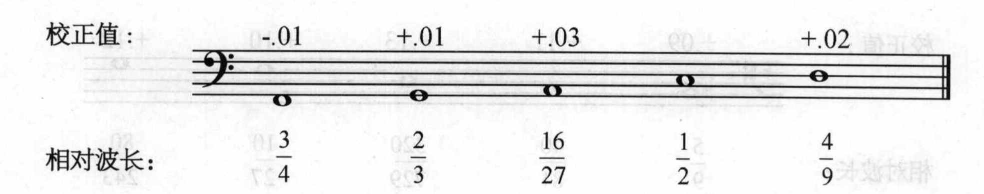


表 63　三弦仲吕宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{3}{4}\times1=\frac{3}{4}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}=\frac{2}{3}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{3}{4}\times\frac{64}{81}=\frac{16}{27}$	十徽八分
徵	正九徽	$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	$\frac{3}{4}\times\frac{16}{27}=\frac{4}{9}$	七徽九分

例 12　第四弦夷则宫五声：

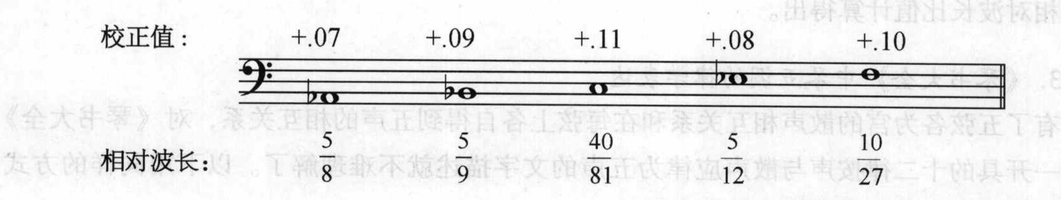


表 64　四弦夷则宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{5}{8}\times 1=\frac{5}{8}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{5}{8}\times\frac{8}{9}=\frac{5}{9}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{5}{8}\times\frac{64}{81}=\frac{40}{81}$	十徽八分
徵	正九徽	$\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	$\frac{5}{8}\times\frac{16}{27}=\frac{10}{27}$	七徽九分

例 13　第五弦无射宫五声：

校正值：+.09　+.11　+.13　+.10　+.12

相对波长：$\frac{5}{9}$　$\frac{40}{81}$　$\frac{320}{729}$　$\frac{10}{27}$　$\frac{80}{243}$

表 65　五弦无射宫五声

阶名	宫弦上的按音位置	相对波长	散声、徽位和徽分
宫	散声	$\frac{5}{9}\times 1=\frac{5}{9}$	散声
商	十三徽外六分七厘	$\frac{5}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{40}{81}$	十三徽一分
角	十一徽上四分五厘	$\frac{5}{9}\times\frac{64}{81}=\frac{320}{729}$	十徽八分
徵	正九徽	$\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{27}$	九徽
羽	八徽上三分五厘	$\frac{5}{9}\times\frac{16}{27}=\frac{80}{243}$	七徽九分

以上二、三、四、五弦还有第二种三分损益律可能性，具体数据可以根据表 60 所列第二种相对波长比值计算得出。

3.《琴书大全》中琴五调的律学表达

有了五弦各为宫的散声相互关系和在每弦上各自得到五声的相互关系，对《琴书大全》中逐一开具的十二律按声与散声应律为五声的文字描述就不难理解了。以下用同样的方式把琴五调各调关系全部用律学表达法解读。

《琴书大全·卷第二·声律上》记载了“琴五调”的定弦方法，以下根据原文逐一分析。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十五》：

黄钟律以第一弦散声为宫，按第一弦十三徽外六分七厘与第二弦散声相应为商，律应太簇；按第一弦十一徽上约四分五厘与第三弦散声相应为角，律应姑洗；按第一弦正九徽与第四弦散声相应为徵，律应林钟；按第一弦八徽上约三分五厘与第五弦散声相应为羽，律应南吕。第六弦为少宫律应黄清；第七弦为少商，律应太清。

这段话是关于“慢角调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

例 14 黄钟律以第一弦散声为宫音，

音　阶：宫　商　角　徵　羽　少宫　少商

校正值：　+.02　+.04　+.01　+.03　　+.02

相对波长：1　$\frac{8}{9}$　$\frac{64}{81}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{16}{27}$　$\frac{1}{2}$　$\frac{4}{9}$

表 66

弦序	律名	阶名	宫弦上的按音位置	宫弦绝对弦长	相对波长	散声、徽位和徽分
一弦	黄钟	宫	散声	4.5 尺	1	散声
二弦	太簇	商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{8}{9}$	十三徽一分
三弦	姑洗	角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{64}{81}$	十徽八分
四弦	林钟	徵	正九徽	3.0 尺	$\frac{2}{3}$	九徽
五弦	南吕	羽	八徽上三分五厘	2.665 尺	$\frac{16}{27}$	七徽九分
六弦	黄清	少宫	正七徽	2.25 尺	$\frac{1}{2}$	七徽
七弦	太清	少商	（十三徽外六分七厘）	2.0 尺	$\frac{8}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$	十三徽一分

“右（又）黄钟、大吕、太簇三律皆以第一弦为宫，其调弦法亦同……”大吕、太簇二律以第一弦为宫，只须分别提高一律、两律，大吕均、太簇均整体移位小二度、大二度。此处不再一一列出。这个定弦方法虽然与《太音大全集》中记载的方法不同，但调出来的结果是相同的。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十六》：

夹钟律以第二弦散声为宫，按第二弦十三徽外六分七厘与第三弦散声相应为商，律应仲吕；按第二弦十一徽上约四分五厘与第四弦散声相应为角，律应林钟；按第二弦正九徽与第五弦散声相应为徵，律应无射；按第二弦八徽上约三分五厘与第一弦散声相应为羽，律应黄钟。第六弦为少羽律应黄清；第七弦为少宫，律应夹清。

这段话是关于“清商调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

例 15　夹钟律以第二弦散声为宫音（从“先定五弦各为宫”一段知二弦夹钟为 $\frac{5}{6}$）



表 67

弦序	律名	阶名	宫弦上的按音位置	宫弦弦长	相对波长	宫弦散声、徵位和徵分
一弦	黄钟	羽	（八徽上三分五厘）		$\frac{5}{6}\times\frac{16}{27}\times2=\frac{80}{81}$	
二弦	夹钟	宫	散声	4.5 尺	$\frac{5}{6}$	散声
三弦	仲吕	商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{5}{6}\times\frac{8}{9}=\frac{20}{27}$	十三徽一分
四弦	林钟	角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{5}{6}\times\frac{64}{81}=\frac{160}{143}$	十徽八分
五弦	无射	徵	正九徽	3.0 尺	$\frac{5}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$	九徽
六弦	黄清	少羽	八徽上三分五厘	2.665 尺	$\frac{5}{6}\times\frac{16}{27}=\frac{40}{81}$	七徽九分
七弦	夹清	少宫	正七徽	2.25 尺	$\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$	七徽

“右（又）夹钟、姑洗二律皆以第二弦为宫，其调弦法亦同……”夹钟、姑洗二律共弦，所以姑洗均各音移高一个小二度。

这个定弦方法以三分损益法为原则，其结果必然与上一节以十一徽纯律音程相应的调节方法得出的结果不同，虽说是紧五弦，但一弦、六弦也都要紧（调高）一个普通音差。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十七》：

> 仲吕律以第三弦散声为宫，按第三弦十三徽外六分七厘，与第四弦散声相应为商，律应林钟；按第三弦十一徽上约四分五厘与第五弦散声相应为角，律应南吕；按第三弦正九徽与第一弦散声相应为徵，律应黄钟；按第三弦八徽上约三分五厘与第二弦散声相应为羽，律应太簇。第六弦为少徵律应黄清；第七弦为少羽，律应太清。

这段话是关于“正调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

例 16　仲吕律以第三弦散声为宫音（从“先定五弦各为宫”一段知三弦仲吕为$\frac{3}{4}$）

音　阶：	徵	羽	宫	商	角	少徵	少羽
校正值：		+.02	-.01	+.01	+.03		+.02
相对波长：	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{9}$

表 68

弦序	律名	阶名	宫弦上的按音位置	宫弦弦长	相对波长	宫弦散声、徵位和徵分
一弦	黄钟	徵	（正九徵）		$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times2=1$	
二弦	太簇	羽	（八徵上三分五厘）		$\frac{3}{4}\times\frac{16}{27}\times2=\frac{8}{9}$	
三弦	仲吕	宫	散声	4.5 尺	$\frac{3}{4}$	
四弦	林钟	商	十三徵外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{3}{4}\times\frac{8}{9}=\frac{2}{3}$	十三徵一分
五弦	南吕	角	十一徵上四分五厘	3.555 尺	$\frac{3}{4}\times\frac{64}{81}=\frac{16}{27}$	十徵八分
六弦	黄清	少徵	正九徵	3.0 尺	$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$	九徵
七弦	太清	少羽	八徵上三分五厘	2.665 尺	$\frac{3}{4}\times\frac{16}{27}=\frac{4}{9}$	七徵九分

“右（又）仲吕、蕤宾、林钟三律皆以第三弦为宫，其调弦法亦同……”蕤宾、林钟二律与仲吕律共弦，蕤宾均、林钟均各音分别移高小二度、大二度。这个正调定弦与前文中《五知斋琴谱》介绍的方法不同，但结果相同。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十八》：

夷则律以第四弦散声为宫，按第四弦十三徽外六分七厘，与第五弦散声相应为商，律应无射；按第四弦十一徽上约四分五厘与第一弦散声相应为角，律应黄钟；按第四弦正九徽与第二弦散声相应为徵，律应夹钟；按第四弦八徽上约三分五厘与第三弦散声相应为羽，律应仲吕。第六弦为少角律应黄清；第七弦为少徵，律应夹清。

这段话是关于紧二、四、五、七弦（相当于“慢宫调”）散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

例 17　夷则律以第四弦散声为宫音（根据上文知四弦夷则为$\frac{5}{8}$）

音　阶：	角	徵	羽	宫	商	少角	少徵
校正值：	+.11	+.08	+.10	+.07	+.09	+.11	+.08
相对波长：	$\frac{80}{81}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{5}{12}$

表 69

弦序	律名	阶名	宫弦上的按音位置	宫弦弦长	相对波长	宫弦散声、徽位和徽分
一弦	黄钟	角	（十一徽上四分五厘）		$\frac{5}{8}\times\frac{64}{81}\times2=\frac{80}{81}$	
二弦	夹钟	徵	（正九徽）		$\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}\times2=\frac{5}{6}$	
三弦	仲吕	羽	（八徽上三分五厘）		$\frac{5}{8}\times\frac{16}{27}\times2=\frac{20}{27}$	
四弦	夷则	宫	散声	4.5 尺	$\frac{5}{8}$	散声
五弦	无射	商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{5}{8}\times\frac{8}{9}=\frac{5}{9}$	十三徽一分
六弦	黄清	少角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{5}{8}\times\frac{64}{81}=\frac{40}{81}$	十徽八分
七弦	夹清	少徵	正九徽	3.0 尺	$\frac{5}{8}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{12}$	九徽

“右（又）夷则、南吕二律皆以第四弦为宫，其调弦法亦同……”南吕与夷则二律共弦，南吕均各音移高小二度。这个定弦的步骤实际上是第3次“清角为宫”，各弦之间的音程关系与后来的“慢宫调”相同。由于前文对五弦各自为宫时已经做出律学规定，此调各弦相生关系以三分损益法为原则，所以当四弦夷则为宫时，一弦和六弦就必须调高一个普通音差。

《琴书大全·卷第二·声律上·二十九》：

> 无射律以第五弦散声为宫，按第五弦十三徽外六分七厘，与第一弦散声相应为商，律应黄钟；按第五弦十一徽上约四分五厘与第二弦散声相应为角，律应太簇；按第五弦正九徽与第三弦散声相应为徵，律应仲吕；按第五弦八徽上约三分五厘与第四弦散声相应为羽，律应林钟。第六弦为少商律应黄清；第七弦为少角，律应太清。

这段话是相当于“紧羽调”散声音阶的各弦相对关系。对所给的条件进行分析，可以得出以下结果，用五线谱附加校正值和表格表述。

例 18　无射律以第五弦散声为宫音（根据上文知五弦无射为$\frac{5}{9}$）

音　阶：	商	角	徵	羽	宫	少商	少角
校正值：	+.11	+.13	+.10	+.12	+.09	+.11	+.13
相对波长：	$\frac{80}{81}$	$\frac{640}{729}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{160}{243}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{320}{729}$

表 70

弦序	律名	阶名	宫弦上的按音位置	宫弦弦长	相对波长	宫弦散声、徽位和徽分
一弦	黄钟	商	（十三徽外六分七厘）		$\frac{5}{9}\times\frac{8}{9}\times2=\frac{80}{81}$	
二弦	太簇	角	（十一徽上四分五厘）		$\frac{5}{9}\times\frac{64}{81}\times2=\frac{640}{729}$	
三弦	仲吕	徵	（正九徽）		$\frac{5}{9}\times\frac{2}{3}\times2=\frac{20}{27}$	
四弦	林钟	羽	（八徽上三分五厘）		$\frac{5}{9}\times\frac{16}{27}\times2=\frac{160}{243}$	
五弦	无射	宫	散声	4.5 尺	$\frac{5}{9}$	散声
六弦	黄清	少商	十三徽外六分七厘	4.0045 尺	$\frac{5}{9}\times\frac{8}{9}=\frac{40}{81}$	十三徽一分
七弦	太清	少角	十一徽上四分五厘	3.555 尺	$\frac{5}{9}\times\frac{64}{81}=\frac{320}{729}$	十徽八分

“右（又）无射、应钟二律皆以第五弦为宫，其调弦法亦同……”应钟与无射二律共弦，所以无射均各音移高小二度。由于运用三分损益法，以五弦无射为宫时，不仅要紧二、四、五、七弦，一弦和六弦也要紧一个普通音差。

《琴书大全》中的琴五调定弦，与前边“先定五弦各为宫”的规定产生内在数理矛盾，使各弦的调节结果显得较为复杂；以一次“变宫为角”和三次“清角为宫”为旋宫顺序，显得不够平衡和过于繁琐。而其他文献中则记载为“变宫为角”、“清角为宫”各两次，紧二、四、五、七弦的调弦方式被慢一、三、六弦的慢宫调所代替。

4.《琴书大全》等文献中体现出的琴律实践

通过对《琴书大全·声律上》中记载的数据进行数学分析，我们可以了解古琴在记谱法发明徽分之前，对徽间音位运用的情况。通过这样的整理，蒋氏系统中的内在矛盾也就凸现出来了。在上文的归纳中，我们看到了一个实践与理论冲突的实例：即三弦仲吕律与一弦黄钟律之按音“十徽微上”相应。在以三分损益法及其律制一统天下的漫长乐律学史过程中，仲吕只能是第 11 次生律而得到的相对波长为$\frac{131072}{177147}=2^{17}\cdot3^{-11}$，相对音高为 2.61 全音（522 音分）的那一律，它的绝对弦长为 3.3296 尺，按音为十徽上四分五厘，换算成徽分即为九徽九分。以蒋克谦其他精确到厘的数据（小数点后第三位）来看，他完全可以算出三分损益律的仲吕律并表达为“十徽上四分五厘”。那么，为什么他在这里要含糊地表述为“十徽微上”？其实，答案并不难找。由于三分损益法不认反生，甚至斥之为“乖相生之道，失君臣之义”，所以虽然反向五度相生，即三倍相生，可以得到纯正四度的简单比例关系$\frac{3}{4}$，相对音高为 2.49 全音（498 音分），但琴人却从不说第十徽为“仲吕律”，而是在实际演奏中自然地运用这个音。① 这可能正是民间乐人常用的巧妙对策，把更合乎自然规律的实践巧妙地隐藏在权威理论的背后。蒋克谦尽管十分忠于三分损益法的规则，但也不得

① 丁承运先生曾经向笔者介绍琴人不言仲吕得自十徽。这正反映了这种音乐实践中的表达避讳。

不在音乐实践的前提下采取一个中庸含糊的态度。这个事实也见证了历史上意识形态对音乐实践的影响与制约。

虽然在众多的音乐文献、特别是在历代乐、律志中没有明确详尽地记载琴律的内容，但从以上提到的诸种文献中所记载的片断，我们可以整合为一个完整的琴律体制，如同表42琴律表所做的工作那样，根据各种相生关系，可以呈逻辑关系排列出28个表格。在这些表述中，可以按图索骥地查出每个琴调所规定的各弦各徽的相对波长。同样，也可以排列出徽分运用的逻辑表格。有了这些系统性数据，就可以把握音程的本质以及在乐调中所具有的功能性或色彩性。并可以充分认定，在琴的实践上，早已在默默地运用反生法一次生律得到相对波长为$\frac{3}{4}$（498音分）的第十徽，将其视为仲吕律。

从《碣石调幽兰》、《明徽暗徽法》到朱熹的《琴律说》，其中都提到了运用一些纯律的徽位或徽间音位，而蒋克谦《琴书大全》则极为可贵地记录下了琴律的系统性和精确的数据。在前后两段文本中显示出的矛盾，也如实地说明了当时琴学实践：当“每弦各为宫”调弦时，以弦长等差划分为物理基础，追求两弦音程的和谐性，以保证古琴演奏中极重要的和音效果，所以黄钟律与夹钟律之间为纯律小三度。而在一弦上求五声时，则追求音程的旋律性，所以黄钟律与夹钟律之间音程系数为$\frac{80}{81}\div\frac{5}{6}=\frac{32}{27}$，即五度律小三度。这种音律关系的选择取舍与音乐内在的调律运动规律直接相关，始终是与乐学结构紧密结合在一起的。《琴书大全》在琴五调定弦过程中也反映出了机械运用三分损益法，面对琴律实践与三分损益律的冲突却找不到解决之道。

从《琴书大全》到《五知斋琴谱》、《琴学入门》，我们也可以看到调弦方法在音律观念上的不同。蒋克谦所记录的是刻意寻找符合三分损益律的音位与散声相谐定弦，这就势必要运用徽间音位；而后两个文献中所反映的是以重视听觉，循“自然之节”的徽位按音与散声相谐的规律来调节各弦。

第八节　中国对十二平均律的研究

一、朱载堉——最早创立十二平均律

三分损益法形成的十二律，最大的问题是旋相不能还宫。一部中国乐律学史的重要内容就是由寻找解决这个问题而提出的各种方法、主张构成的。最接近十二平均律的何承天新律和王朴新律都有意无意地取得了近似结果。但他们都是用一种调节的办法来找出这样一个近似的结果，却不能建立起一套有严密逻辑的平均律系统。

要求出十二平均律，必须以建立等比数列概念和掌握开方技术为前提。何承天新律时代，由于没有开方术的数学支持，虽然十二平均律的理想已完全成熟，但所用的方法在理论上是错误的。他把经过三分损益法第12次生律得出的短于黄钟的那律之振动体长度除以12，分别加在每一次相生上，虽然最后效果上很接近十二平均律，但由于以振动体长度的

均匀差数添加到各律，不合“音越高，差数越小的道理”，故而“何承天12长度均差新律”理论价值并不高，只是具有历史意义。王朴也曾逼近了这样的结果，但也只能运用调整生律链环的局部，没有提出一个普遍公式。直到16世纪后半叶（1584年以前），明朱载堉（1536～1611年）在《律历融通》中提出了十二平均律的概念“新法密率”和基本方法。但在《律历融通》（1581年）中所介绍的方法仍然是以三分损益法为基本思路，采用缩小分母，求出五度和四度的比数，然后按照上、下相生顺序乘除12次，就可以“返本还原”。他很清楚地言明，这是“新法，与古法不同”。直到1596年的《律吕精义》才详细公布了“密率”的方法与数据，他所求出的一系列等比级数使十二平均律得到了数学公式化的表达。十二平均律与其他各种在自然律基础上演绎出来的律制的不同就在于，其他律制是从一个或两个基本的生律“细胞”相生而出，十二平均律则是人为地预先将八度比值均分，因而设定出一个半音的比率，然后依次连乘。所以，此前何承天、王朴们由于跳不出相生思维的框架，也没有开方术的计算方法支持，就不可能得到真正的十二平均律。

二、朱载堉的计算方法

度本起于黄钟之长，则黄钟之长即度法一尺。命平方一尺为黄钟之率。东西十寸为句，自乘得百寸为句幂；南北十寸为股，自乘得百寸为股幂；相并共得二百寸为弦幂。乃置弦幂为实，开平方法除之，得弦一尺四寸一分四厘二毫一丝三忽五微六纤二三七三零九五零四八八零一六八九为方之斜，即圆之径，亦即蕤宾倍律之率。以句十寸乘之，得平方积一百四十一寸四十二分一十三厘五十六毫二十三丝七十三忽零九五零四八八零一六八九为实，开平方法除之，得一尺一寸八分九厘二毫零七忽一微一纤五零零二七二一零六六七一七五，即南吕倍律之率。仍以句十寸乘之，又以股十寸乘之，得立方积一千一百八十九寸二百零七分一百一十五厘零零二毫七百二十一丝零六十六忽七一七五为实，开立方法除之，得一尺零五分九厘四毫六丝三忽零九纤四三五九二九五二六四五六一八二五，即应钟倍律之率。盖十二律黄钟为始，应钟为终，终而复始，循环无端，此自然真理，犹贞后元生，坤尽复来也。是故各律皆以黄钟正数十寸乘之为实，皆以应钟倍数十寸零五分九厘四毫六丝三忽零九纤四三五九二九五二六四五六一八二五为法除之，即得其次律也。安有往而不返之理哉！……①

这段话介绍了他用勾股定理为计算方法，从第一句，他已经给出了黄钟倍律和黄钟正律弦长比为2∶1。具体过程为：“黄钟之长”一尺，设一尺的平方为黄钟正律（100寸^2）；勾幂（100寸^2）+股幂（100寸^2）=200寸^2，是为黄钟倍律。最后一句话“皆以应钟倍数……为法除之”表达了他以应钟倍律与黄钟正律之间的距离作为十二律之间各律的等程标

---

① 《律吕精义·内篇·卷一·不用三分损益第三》，冯文慈点校本第9－10页，人民音乐出版社1998年7月北京第一版。

准。操作方法是以求比例中项逐步得出：将黄钟倍律开平方得蕤宾倍律；蕤宾倍律开平方得南吕倍律；南吕倍律开立方得应钟倍律。

朱载堉的计算法在今日看来，其思维逻辑框架为：

表 71

c^1	$^\sharp c^1$	d^1	$^\sharp d^1$	e^1	f^1	$^\sharp f^1$	g^1	$^\sharp g^1$	a^1	$^\sharp a^1$	b^1	c^2
黄钟倍律①	大吕倍律	太簇倍律	夹钟倍律	姑洗倍律	仲吕倍律	蕤宾倍律	林钟倍律	夷则倍律	南吕倍律	无射倍律	应钟倍律	黄钟正律
x^{12} :	x^{11} :	x^{10} :	x^9 :	x^8 :	x^7 :	x^6 :	x^5 :	x^4 :	x^3 :	x^2 :	x :	1

因为（黄钟倍律长度）：（黄钟正律长度）=2：1，所以 $x^{12}=2$；$x=\sqrt[12]{2}$，即应钟倍律的相对长度，朱载堉把它认作“诸率之母”视作计算焦点。朱载堉的计算三步骤是这样的：

第一步：计算出 6 个半音的蕤宾倍律的相对长度（$^\sharp f$），即先把纯八度开平方。$(\sqrt[12]{2})^6=\sqrt{2}=1.414213562373095048801689$（尺）；

第二步：计算出 3 个半音的南吕（$^\sharp d$）相对长度，即从第一步所得再开平方。$(\sqrt[12]{2})^3=\sqrt[4]{2}=\sqrt{\sqrt{2}}=1.189207115002721066717499 97\cdots\cdots$（尺）；

第三步：计算半音应钟倍律（$^\sharp c$）相对长度，根据第二步所得为 x^3，需要开 3 次方（古代称为“立方”），计算技巧更高深，朱载堉在那个时代算出这个结果，在数学方面也是走在最前沿：$\sqrt[3]{x^3}=x=1.059463094359295264561825\cdots\cdots$（尺）

接下来，朱载堉列出了黄钟倍律至黄钟正律共十三律位的数据，他对所有的计算都运算到 25 位数字，今日普通电子计算器也只算 10 位数，但他在 400 多年前就已经达到如此精确的程度。

现在我们可以用表格表示朱载堉计算所得的 12 项等比数列之值：

表 72　（近似值一栏四舍五入保留 15 位小数）

音程系数所对应的音程	相对长度所对应的律吕名称	代数表达式	简化后的根式	朱载堉的近似值	相对音高
基音	黄钟倍律	$(\sqrt[12]{2})^{12}$		2	0
$\frac{1}{2}$全音	大吕倍律	$(\sqrt[12]{2})^{11}$		1.887748625363387	0.5
1 全音	太簇倍律	$(\sqrt[12]{2})^{10}$	$(\sqrt[6]{2})^5$	1.781797436280679	1

① 此处定黄钟音高为 c。

（续表）

音程系数所对应的音程	相对长度所对应的律吕名称	代数表达式	简化后的根式	朱载堉的近似值	相对音高
$1\frac{1}{2}$全音	夹钟倍律	$(\sqrt[12]{2})^9$	$(\sqrt[4]{2})^3$	1. 681792830507429	1. 5
2 全音	姑洗倍律	$(\sqrt[12]{2})^8$	$(\sqrt[3]{2})^2$	1. 58740105196819	2
$2\frac{1}{2}$全音	仲吕倍律	$(\sqrt[12]{2})^7$		1. 49830707687668	2. 5
3 全音	蕤宾倍律	$(\sqrt[12]{2})^6$	$\sqrt{2}$	1. 414213562373095	3
$3\frac{1}{2}$全音	林钟倍律	$(\sqrt[12]{2})^5$		1. 334839854170034	3. 5
4 全音	夷则倍律	$(\sqrt[12]{2})^4$	$\sqrt[3]{2}$	1. 259921049894873	4
$4\frac{1}{2}$全音	南吕倍律	$(\sqrt[12]{2})^3$	$\sqrt[4]{2}$	1. 189207115002721	4. 5
5 全音	无射倍律	$(\sqrt[12]{2})^2$	$\sqrt[6]{2}$	1. 122462048309373	5
$5\frac{1}{2}$全音	应钟倍律	$\sqrt[12]{2}$		1. 059463094359295	5. 5
6 全音	黄钟正律	1		1	6

朱载堉能够完成十二平均律的计算，不仅表明他在律学、数学方面达到的世界性高度，同时说明他在思想认识方面也敢于冲破禁忌。中国2000年来的律学史一直围绕黄钟律数必为九寸，不敢越雷池半步。他终于认识到“黄钟九寸”只是“算家立率”而已，设黄钟正律一尺，突破了思想难关，使新法密率的计算数值变得简洁清晰，将数理理论与实验对象统一起来，通过对一根弦长做一系列的开方计算，求比例中项，得到长度越来越短，音越来越高这种合乎自然的结果。虽然朱载堉最早发明了十二平均律，不仅是对中国律学史的一大贡献，也是对世界律学史的一大贡献，但他的重大发明并没得到统治阶级的重视，也没有得到实际运用。

第三章　印度人奇妙的律学理论

第一节　古老的“22 斯鲁蒂”理论

印度古代的“22 斯鲁蒂”（sruti）理论是纯律音阶的最古老的系统性理论，被记述在印度公元 1 世纪的（一说公元 4 世纪）《乐舞论》（*Nātya Sāstra* 文艺理论家婆罗多 Bhārata 著）中，从文中所阐述的 22 律与音阶的关系得知，这一理论所述并非平均律。“斯鲁蒂”意为“听到”，即听觉可以分辨到的最小差异，所以这是一个对感觉量的描述体系。这个古老理论要求用“斯鲁蒂”的数目来区分相近似的音程，明确指出相隔 13 个斯鲁蒂或 9 个斯鲁蒂的两个音构成的音程，两音之间互为协和。① 这个定义表明这两种协和音程正是我们今天所说的协和音程纯五度、纯四度，同时也昭示了一个最重要的内容，那就是用“4 个斯鲁蒂”称呼大全音，“3 个斯鲁蒂”称呼小全音。由此可知，普通音差在印度音律理论中体现为“1 个斯鲁蒂”。关于这一点我们可以从下文的图示 20 中看到这样的逻辑关系。

印度古代音阶有七个音级，这种音级制度被称为“斯瓦洛”（svara），各自的梵文名称和简写列表如下：②

表 73

音级名称	简写	现代音名	音译为	意译为
ṣaḍjo	sa	C	萨	
ṛṣabha	ri	D	利	
gāndhāra	ga	♭E	格	
madhyama	ma	F	玛	中令
pañcama	pa	G	帕	
dhauvata	dha	A	达	
niṣāda	ni	♭B	尼	
ṣaḍjo	sa	c	萨	

---

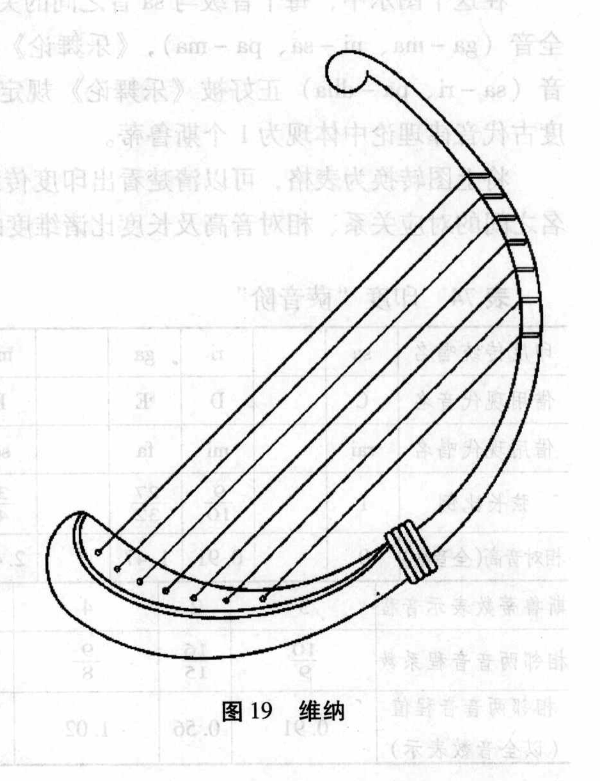
① 《乐舞论》第 28 章 22－23 节专门定义了协和与不协和两种音程性质，含 9 或 13 个“斯鲁蒂”的音程为协和的（samvadin）音程；含 2 或 12 个“斯鲁蒂”的音程为不协和的（vivadin）音程。感谢刘勇博士在美国加利福尼亚大学洛杉矶分校图书馆找到了《乐舞论》（*The Natyasastra*，by Bharata，Volume 2，Bibliotheca India，*The Asiatic Society*，Calcutta，India.）的英译本（Ghosh. M.，Translator Vol. 1，Ch. 1－27，1950；Vol. 2，Ch. 28－33，1961.），并将这部分相关资料提供给我。

② 参考《新格罗夫音乐与音乐家词典》印度条目中的音体系“tonal systems”一节，第 91－98 页。

一、记录在印度古籍《乐舞论》中的两种音阶

婆罗多时代的重要乐器维纳（vīṇāj）是弓形竖琴，由长短不同的琴弦发出高低不同的音，通过观察这样的乐器获得把握音高与弦长变化之间的关系是有些困难的，所以不会产生如同中国古代在弦准上获得三分损益的经验；也不会产生美索不达米亚人的量音术（见后文第四章第一节之量音理论）。因此，用听觉分辨音高并以音程相协的方法调节乐器上的弦音是最自然和最直接的，所以，古代印度人形成了这种对细微音差的感性把握，并建立起以“斯鲁蒂”数来量化音程这样的描述体系。后来，在北印度，弓形竖琴式维纳转化成棒状齐特尔类乐器，更名为bin；在南印度，这个乐器名称被保留下来，但所指并不是这种乐器，而是琉特类乐器了。弓形维纳在音乐生活中渐渐消失了。齐特尔类的乐器bin和琉特类的维纳都是有指板的，易于获得对于谐音的经验，《乐舞论》中有一个表达两音相谐共振的词为“anuvadin”①。

《乐舞论》第28章中记述了两种音阶（grāma）的结构：萨音阶（sadjo－grāma）和玛音阶（madhyāma－grāma），婆罗多就是以每两音之间的“斯鲁蒂”数来量化这两个音阶结构。具体而言，就是“斯鲁蒂”数在这两种音阶中的分配方案。


图19 维纳

书中说，萨音阶的7个音级之间，从萨（sa）音开始，斯鲁蒂的分配原则依次为3、2、4、4、3、2、4，② 这意味着音阶是由两段五－四度链的协和音程关系结合在一起的。结合的原则是，萨音阶的结构为pa音与sa音在同一个五度链上。尽管古代印度没有精确的长度比划分记载，但我们还是可以从这种特殊的表述中分析出隐含着的律学思维。Madhyama意为“中间”，首先可以理解为在萨音阶的7个音级中，ma音是位于正中的一个音级，因而称为“中”；从律学角度看，它正好位于两个sa音的中间，即$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，这暗示出，印度人是以关注掐段率的多少来区别音高（即在原基音弦长基础上，掐住$\frac{1}{4}$的节点，剩下的有效弦长为$\frac{3}{4}$）。这样的办法虽然可以解决确定出维纳琴上琴弦长短的技术问题，并且能够分辨出微小的音差，但

① 《乐舞论》第28章22、23节，英译本第二卷第6页。

② 《乐舞论》，第28章25－26节，第8页。

反倒疏远了背后的实质是有效振动段的长度。《乐舞论》举例在萨音阶中，sa－pa、ri－dha、ga－ni、sa－ma 这 4 个音程都是协和的，根据这样的规定，我们可以将《乐舞论》中提到的印度传统“萨音阶”的结构关系建立起音系网，现图式如下：

ri — dha
D *A*
$\frac{9}{10}$ $\frac{3}{5}$

ga — *ni* — *ma* — [*sa*] — *pa*
♭*E* ♭*B* *F* [*C*] *G*
$\frac{27}{32}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{3}{4}$ 1 $\frac{2}{3}$

图 20　萨音阶音系网

在这个图示中，每个音级与 sa 音之间的关系可以看的很清楚，每相隔两个五度级为大全音（ga－ma、ni－sa、pa－ma），《乐舞论》规定为 4 个斯鲁蒂，而音系网中的两个小全音（sa－ri、pa－dha）正好被《乐舞论》规定为 3 个斯鲁蒂，所以说，“普通音差”在印度古代音律理论中体现为 1 个斯鲁蒂。

将上图转换为表格，可以清楚看出印度传统音阶“萨音阶”传统音名与现代音名、唱名之间的对应关系、相对音高及长度比诸维度的数据。

表 74　印度“萨音阶”

印度传统唱名	sa	ri	ga	ma	pa	dha	ni	sa
借用现代音名	C	D	♭E	F	G	A	♭B	C
借用现代唱名	rai	mi	fa	so	la	si	do	rai
弦长比例	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音数)	0	0.91	1.47	2.49	3.51	4.42	4.98	6

斯鲁蒂数表示音程	3	2	4	4	3	2	4
相邻两音音程系数	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$
相邻两音音程值（以全音数表示）	0.91	0.56	1.02	1.02	0.91	0.56	1.02

参见“自然四音列”中 b2 式——“全半全”之小全音靠下者，“萨音阶”是由这样两个四音列以大全音相隔连接而成，音阶结构与古希腊“弗里吉亚调式”和谐派第二种规范相同（见后文第五章第一节之一）。

书中又说，玛音阶的变化只是在 ma－pa 之间减少 1 个斯鲁蒂，以我们现有的律学概念而言，即大全音降低一个“普通音差”而成为小全音，sa 音与 pa 音之间含 10 个斯鲁蒂，因而变为一个不协和音程。如此，音系网结构也就有所不同。

图 21　玛音阶音系网

将上图转换为表格，同样获得有关“玛音阶”的各维度数据。

表 75　印度“玛音阶”

印度传统唱名	ma		pa		dha	ni		sa		ri	ga		ma
借用现代音名	F		G		A	♭B		C		D	♭E		F
借用现代唱名	so		la		si	do		rai		mi	fa		so
弦长比例	1		$\frac{9}{10}$		$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{16}$		$\frac{1}{2}$
相对音高	0		0.91		1.93	2.49		3.51		4.42	4.98		6

以斯鲁蒂数表示音程	3	4	2	4	3	2	4	
相邻两音音程系数	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	
相邻两音音程值（以音分数表示）	0.91	1.02	0.56	1.02	0.91	0.56	1.02	

前半截纯四度框架内是“自然四音列”的 a2 式－小全音靠下者（见后文第五章第一节之一）。

《乐舞论》中还提到了“格音阶”（gāndhāra－grāma），但甚至在婆罗多时代就已经鲜见提及，婆罗多猜测那是用于神圣仪式上的一种古代音阶。

二、记录在印度古籍《乐海》中的“格音阶”

13 世纪时，克什米尔音乐理论家娑楞伽提婆（Narada Śārngadeva，1210～1247 年）在他的著作《乐海》（*Sangīta－Ratmākara*）一书中，不仅描述了以 22 弦的维纳琴当做标准器，演示如何在 22 个斯鲁蒂中获取不同的七声音阶，还形容了存在于古代印度的“格音阶”，并将此音阶描述为“仅在天堂，不在人间”。娑楞伽提婆对这个音阶结构有这样的说明：从萨音阶中的 sa 和 ma 两音级中各取出一个“斯鲁蒂”加入 ga 音级中（其结果是 ri 音级包含两个“斯鲁蒂”，ga 音级包含 4 个“斯鲁蒂”，ma 音级包含 3 个“斯鲁蒂”）；从 pa 音级取出一个“斯鲁蒂”加入 dha 音级（结果 pa 音级包含 3 个“斯鲁蒂”，dha 音级包含 4 个“斯鲁蒂”）；再从 dha 和 sa 两个音级中各取出一个“斯鲁蒂”加入 ni 音级（结果是 dha

音级包含 3 个“斯鲁蒂”，ni 音级包含 4 个“斯鲁蒂”，sa 音级包含 3 个“斯鲁蒂”）。① 根据括号中的提示，可以构拟出下列音阶样式：

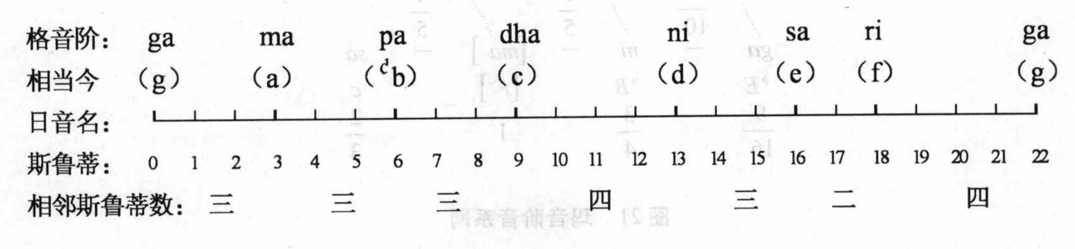


图 22

这个音阶的特别之处在于，纯四度内包含连续两个小全音，第三级音就不是一个常规的大三度或小三度。用双轨推算的办法可以知道这是一个什么音：

办法一：
- 2.49 － 0.91 － 0.91 ＝ 0.666 全音
- 纯四度－小全音－小全音＝近似中二度
- $\frac{4}{3} \div \frac{10}{9} \div \frac{10}{9} = \frac{27}{25}$

pa——dha 之间为纯律范畴的近似中二度。

办法二：
- 0.91 ＋ 0.91 ＝1.824 全音
- 小全音＋小全音＝近似中三度
- $\frac{10}{9} \times \frac{10}{9} = \frac{100}{81}$

ga——pa 之间为纯律范畴的近似中三度。

我们将图 22“格音阶”中各音之间的关系用音系网表达，会看到这个音阶结构涉及一个更复杂的音系网关系。

pa b $\frac{81}{100}$　　(♯f) $\frac{27}{50}$

(d) $\frac{27}{40}$　　*ma* a $\frac{9}{10}$　　*sa* e $\frac{3}{5}$

ri f $\frac{9}{16}$　　*dha* c $\frac{3}{4}$　　*ga* [g] 1　　*ni* d $\frac{2}{3}$

图 23　格音阶音系网

① 转引自《律学》（第三次修订版）第 250－251 页，1996 年 1 月北京第三版，人民音乐出版社。

这个音系网的最下一行是基链，pa（b）音级是一个演绎律，第二行最左端的“d”和第一行右端的“♯f”这两音并没有被运用在这个音阶结构中。从音律相生和乐调运动的逻辑关系中，“pa”音的出现显得缺少根据，但在有指板的弦乐器实践条件下却不难获得。

而在上编第一章第一节中就已经介绍过印度音乐音律理论的发展一直是与琉特类和棒状齐特尔类弦乐器 Vina 联系在一起的。在公元 1 世纪的后半叶，古代弓型竖琴 vina 渐渐被棒状齐特尔类乐器取代。起初，只有一条弦，后来增加到两弦、三弦。与弓型竖琴相比，这种新的 vina 最突出的特征就是每条弦一样长，可以在指板上找到弦的不同节点，使一根弦发出一系列音而不是一弦一音。7 世纪时，这种新型 vina 还没有品位，从 13 世纪开始增加了 12 到 14 个品，这些品位标志出每根弦上至少有 13 到 15 个音位。将上列数据整理为格音阶的表格，易于比较出与前两种音阶的不同。

表 76　印度“格音阶”

印度传统唱名	ga		ma		pa		dha		ni		sa		ṙi		ga
借用现代音名	E		♯F		𝄳G		A		B		♯C		F		G
借用现代唱名	so		la		𝄳si		do		rai		mi		fa		so
弦长比例	1		$\frac{9}{10}$		$\frac{81}{100}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{1}{2}$
相对音高	0		0.91		1.82		2.49		3.51		4.42		4.98		6
以斯鲁蒂数表示音程		3		3		3		4		3		2		4	
相邻两音音程系数		$\frac{10}{9}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{27}{25}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$		$\frac{9}{8}$	
相邻两音音程值（以音分数表示）		0.91		0.91		0.665		1.02		0.91		0.56		1.02	

三、三种音阶的主要差异

现在我们可以对这三种音阶做一个完整描述，它们的区别只在于音阶的前半段的四音列内部结构不同。在纯四度框架内，通过变动某个音程的斯鲁蒂数，使音阶结构发生变化，更具体地说，三种音阶结构只是主音上方三音不同，萨音阶三音为五度相生律（三分三倍生律）小三度，玛音阶三音为纯律大三度，而格音阶三音则为近似中三度，超出了我们所熟悉的大小三度音程概念，形成一种类中三度，但仍以具有纯律性质的“斯鲁蒂”系统来描述。

以下列表比较三种音阶的前半段四音列：

表77

萨音阶	sa		ri	ga			ma
借用现代唱名	rai		mi	fa			so
相对弦长	1		$\frac{9}{10}$	$\frac{27}{32}$			$\frac{3}{4}$
相对音高（全音数）	0		0.91	1.47			2.49
斯鲁蒂数表示音程		3		2		4	
玛音阶	ma		pa			dha	ni
借用现代唱名	so		la			si	do
相对弦长	1		$\frac{9}{10}$			$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
相对音高	0		0.91			1.93	2.49
斯鲁蒂数表示音程		3			4		2
格音阶	ga		ma		pa		dha
借用现代唱名	so		la		^{c}si		do
相对弦长	1		$\frac{9}{10}$		$\frac{81}{100}$		$\frac{3}{4}$
相对音高	0		0.91		1.82		2.49
斯鲁蒂数表示音程		3		3		3	

不过，如果按照本节前边那段描述文字所介绍的“斯鲁蒂”增减步骤，格音阶的第六级音（sa）应该是含两个“斯鲁蒂”，相对弦长为$\frac{5}{8}$（小六度音程，4.07 全音）。

表78

萨音阶	sa		ri	ga		ma		pa		dha	ni		sa
借用现代音名	C		D	♭E		F		G		A	♭B		C
以斯鲁蒂数表示音程		3	2		4		4		3	2		4	
书中记述第一步			+2		−1							−1	
书中记述第二步							−1		+1				
书中记述第三步									−1	+2		−1	
变化后的斯鲁蒂数		3	4		3		3		3	4		2	
整理为格音阶	ga		ma		pa	dha		ni	sa		ri		ga
借用现代音名	C		D		^{c}E	F		G	♭A		♭B		C
相对弦长	1		$\frac{9}{10}$		$\frac{81}{100}$	$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{1}{2}$
以斯鲁蒂数表示音程		3		3		3	4		2	3		4	
相邻两音音程系数		$\frac{10}{9}$		$\frac{10}{9}$		$\frac{27}{25}$	$\frac{9}{8}$		$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$		$\frac{9}{8}$	

六级音为小六度，将形成下面这样的音系网：

pa
$^{\sharp}G$
$\frac{81}{100}$

ma
$^{\sharp}F$
$\frac{9}{10}$

(B)
$\left(\frac{27}{40}\right)$

ri — dha — ga — ni

D $\frac{9}{16}$　A $\frac{3}{4}$　[E] 1　B $\frac{2}{3}$

sa
C
$\frac{5}{8}$

图 24　格音阶音系网第二种假设（借用现代音名，以 Sa 为 C）

这样的七声音列很显然不太自然，也不合逻辑。由于没有查阅原始文献的条件，我们无法核对这个资料是原始记载本身有误，还是翻译过程中的讹误。①

《乐海》的作者具有强烈的学科建设意识，他创建了许多术语，使文本叙述更为条理化。他为 22 个斯鲁蒂逐一命名，并划分为五类情感性质：（1）眩目耀眼的；（2）大的、伸展的；（3）怜惜的；（4）柔和的；（5）适度的。并将这五种具有不同情感性质的斯鲁蒂分配在七个音级上，更证明了 22 斯鲁蒂是不平均的。他还命名含 4 个斯鲁蒂的大全音为"brūhmana"，3 个斯鲁蒂的小全音为"kṣatriya"，2 个斯鲁蒂的纯律大半音为"vaiśya"，1 个斯鲁蒂的普通音差为"śūdra"。于是在他的表述中，就很清楚地直接以音程名来描述。在《乐海》的著述中，也谈论到乐音所具有的美学含义，音阶中 7 个音各自代表不同的神，各自具有不同的颜色。②

如果没有纯律知识，就难以了解中国传统宫调式与自然大调之间、中国传统羽调式与自然小调之间的明显差别，现代基本乐理教科书以十二平均律为基础是讲不清这其间的本质区别的。斯波索宾竟将中国宫调式定义为"大调性五声音阶"，羽调式定义为"小调性五声音阶"。这个错误认识的影响至今甚为深远。③ 同样如果没有纯律知识，更难以懂得印度音阶与大小调之间细微却又涉及风格表情本质的区别。比较表 74 和表 15、表 75 和表 14，两者的区别可以看得很清楚。

---

① 根据 *Early Indian music.* 一文（收入 *A Search in Asia for a New Theory of Music* 一书，Jose S. Buenconsejo（editor），Center for Ethnomusicology，Univ of Philippines，2003；pages 59 - 76.）中，作者 Subhash Kak 所引《乐海》英译文（R. K. Shringy and Prem Lata Sharma 的译本，卷 1 第 141 页 - 2，1978 年版，Motilal Banarsidass，Delhi），第一步应为 ri 音减去 1 个斯鲁蒂，而不是 sa 音。这样就与中译文中括号内的表述相吻合。

② 同①。

③ 比如人们概念中的五度相生律大音阶、小音阶只是借用了纯律大、小调音阶的概念，而忽略了大、小调音阶是根据弦长和谐划分与等差划分的自然原则而产生。我们强调律学研究必须建立在调律运动的自然规律之上，否则就会陷入脱离实践的纯理论抽象，就必然遭实践的冷落。

以往在印度乐制研究方面存在含糊混乱的局面，主要是对“斯鲁蒂”的认识有误会。人们很容易把“22 斯鲁蒂”理解为一种平均律制，其实以相对弦长的真数表达，以及相邻两音音程系数的对比，各种音阶结构的不同是可以看得很清楚的。

第二节　16 世纪以后律学研究的学理化发展

从 16 世纪开始，印度乐制分化为南方（包括南印度和斯里兰卡）和北方（包括北印度、巴基斯坦、孟加拉和尼泊尔）两种体系。这种分化与南北地区各自发展起来的“拉格”（raga）分类法密切相关。“拉格”是印度和巴基斯坦音乐中的曲调形式，由一组特定的音和独特的旋法、节奏形式所构成，供即兴演奏之用。它在音调进行方向、装饰音用法、感情各方面都有特定规则，甚至在什么时间、场合下演出都有规定。多数“拉格”有两种基本性质：（1）有一套技术规则和指令；（2）以自然而即兴的表演方式运用到音乐中。这就是说在规定范围内可以自由发挥。由于音律上自由微妙的变化，音乐家们创造出丰富多样的“拉格”。16～17 世纪时，理论家们试图将过多的“拉格”分类归并，以律学的数理定义建立起体系化的“拉格”理论。这个乐制理论体系不仅对“拉格”理论有深刻影响，同时也影响了语言艺术。

一、拉玛马特亚最早用实践的方法逼近数理表达

1550 年，在印度南部地区，音乐理论家拉玛马特亚（Ramamatya）改造律制，以棒状齐特尔类拨弦乐器 vina 作为实践物。拉玛马特亚将四条弦以纯五度 – 纯四度 – 纯四度定弦，形成 sa – pa – sa – ma（相当于唱名 Do – So – Do – Fa）四弦关系，再以八度相应关系设品，最后形成的事实是，以“林玛半音”（$\frac{256}{243}$，0.45 全音）和“阿波托美半音”（$\frac{2187}{2048}$，0.57 全音）相间方式设置 6 个品位，这样便获得一个八度 14 个音。采用“林玛半音”和“阿波托美半音”这两种半音构成不平均 12 律，代替了量化效果并不清晰的斯鲁蒂 22 律。

他详细记述了每弦上散声与 6 个品位音的音名，① 于是，我们可以了解到各弦之间的相应关系：

第四弦的二品与第二弦散声（pa）高八度相应；

第四弦的四品与第二弦二品高八度相应；

第四弦的六品与第二弦四品高八度相应。

第二弦的五品与第一弦散声（sa）高八度相应；

第二弦的三品与第四弦五品低八度相应；

第二弦的一品与第四弦三品低八度相应。

---

① 遗憾的是，国内没有条件看到拉玛马特亚原著的译本，只能辗转地从其他研究论著中读到片段的引文。英文译本有 Aiyar，M. S. R. 1932 的版本。关于四弦六品的定弦布品方法参见 Aiyar，M. S. R 的英译本（1932）第 52 – 53 页。

第三弦各音级与第一弦各音级高八度相应。

他的这些理论建树发表在他的一本小书 *Svaramelakalanidhi* 中。① 他所采取的这种实践方法，其律学本质是：从基音出发，14 个音的生律关系是三分相生 6 次，三倍相生 6 次，及高八度基音共得 14 律。下表中排列的正是拉玛马特亚用六品琉特式维纳描述的八度 14 律。

表 79

相生方向	四度相生（三倍反生）						基音	五度相生（三分相生）					
相生顺序	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6
拉玛马特亚音名	Cyutapañcama ma	ri	dha	Sadharana ga	Kaisiki ni	ma	sa	pa	Pañcasruti ri	Pañcasruti dha	Cyutasadja ga	Cyutasadja ni	Cyutapañcama ma
现代音名	$^{\flat}$G	$^{\flat}$D	$^{\flat}$A	$^{\flat}$E	$^{\flat}$B	F	C/c	G	D	A	E	B	$^{\sharp}$F
相对弦长	$\frac{729}{1024}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	$1/\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{512}{729}$

事实上，他的做法只是以毕达哥拉斯律代替了印度有纯律性质的 22 斯鲁蒂律制。虽然从此印度律制已经切近精确的数理表述，但在对音律深层规律的探索方面，并没有超越斯鲁蒂体系原有的价值，因为，斯鲁蒂体系是建立在自然听觉基础上的。

尽管从律学史的角度来看，拉玛马特亚并没能对以斯鲁蒂数描述为特征的古代律学加以理论解释，但作为一个律学家来说，他却是印度第一个用明确的定弦方式来定义乐律体系的理论家。他的主要贡献集中在 3 点：（1）最早提出 14 律理论并以 12 音运用于音乐实践；（2）详细介绍了四弦六品维纳的布品法，用乐器实践来表述他的律学理论；（3）区别理论性拉格和音乐性拉格的不同。他将 14 律、12 音、拉格结构这三个层面的观念组合在一起，提炼出 20 类拉格，并把 60 多种音乐实践中的“拉格”归在这 20 种类型下，制定了拉格分类法和音乐实践中的五声性拉格。

17 世纪，马基（Venkata makhi，1620 年）发表了自己的观点，他将拉玛马特亚的方法加以扩充，仿效古希腊的四音列，将南方地区各种拉格在音阶构成上加以归纳，一共编制出 19 种四音列，通过不同的组合，可以构成许多种拉格，并以此来分类，制定出南方的七声性拉格。最终，由一位名叫高芬达（Govinda，1800 年）的理论家又将马基的理论加以发展，确立了一直传承到今的南印度音乐体系，包括 72 种七声音阶。

二、阿霍帕拉·彭迪达的掐段率

17 世纪，在北方地区，音乐理论家阿霍帕拉·彭迪达（Ahobala – Pandita）在他的著作《音乐之本》（*Sangita – parijata*）一书中描述了在拨弦乐器维纳琴弦上划分弦的长度，得到一种不规则十二律各音级的高度。比较以上各时代的先贤们，彭迪达的成果意味着印度自古以来的律学研究终于从不清晰的感觉量描述中挣脱出来，进步到在真数领域中以明确的

---

① 同前注 P128 注①，Aiyar，M. S. R 的英译本（1932）第 43 页。

长度比表达音高的具有科学性、逻辑化的境界。这段材料可以在《新格鲁夫音乐和音乐家辞典》中找到，同时也被转述在缪天瑞先生《律学》一书中。① 但需要对《音乐之本》中所介绍的方法做出清晰的律学解释，下面将对每一步骤展开分析。《新格鲁夫音乐和音乐家辞典》中的原文列出12弦相互间的弦长关系，现转引如下：

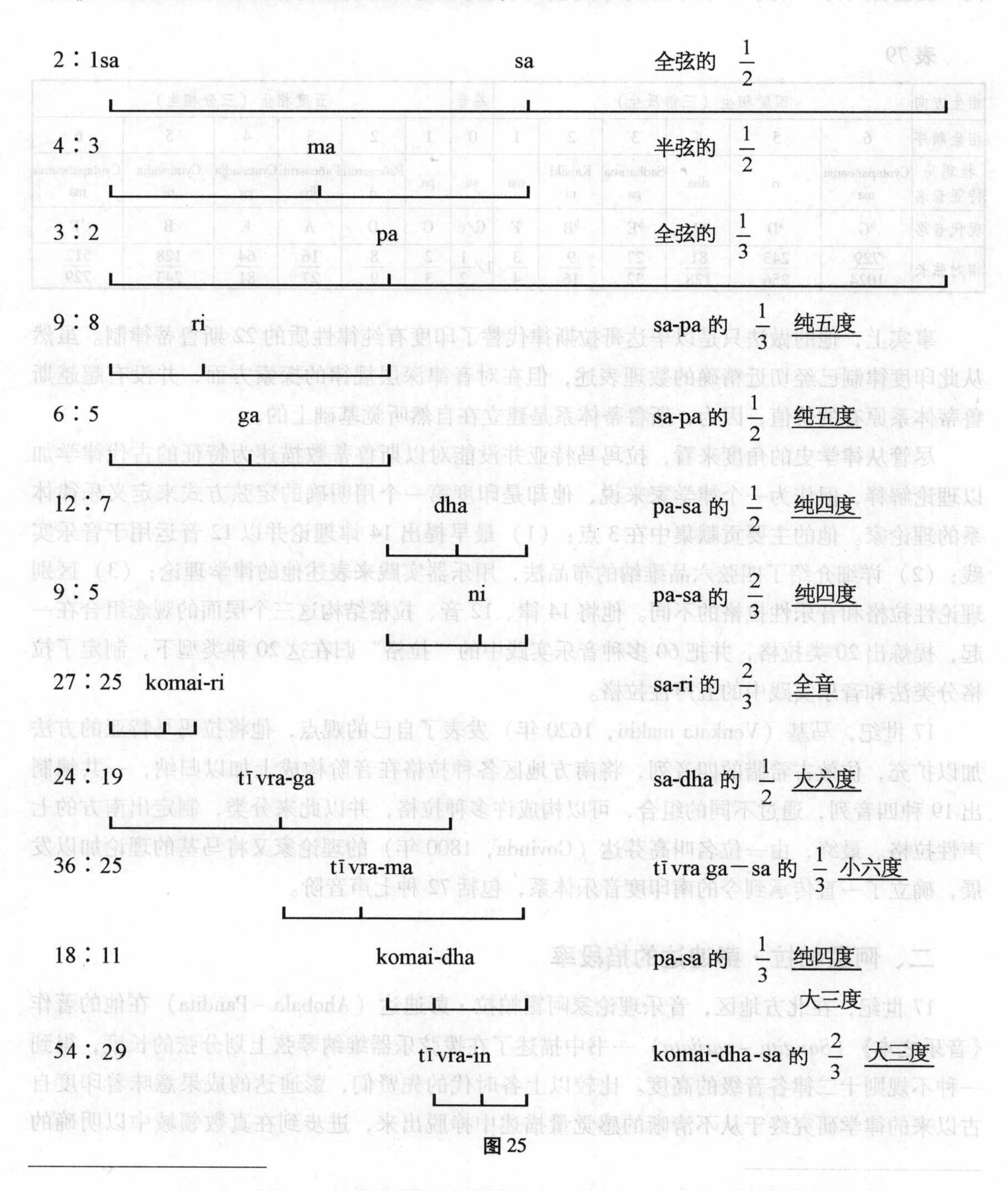


图25

① 详见《新格鲁夫音乐和音乐家辞典》印度条目第96页表8，《律学》第255页例150。

以上这段资料非常珍贵，但却包含着一个错误。事实上，每个线段右边那个重要信息“某音 - 某音的……分之…”是指被掐住的那段弦长再次进行的分割；后边提示的音程（即用下横线标出的音程）不仅是错误的，而且容易产生错觉，让人以为是对这些音程的有效弦长再做分割。所以，在这里特意将原文中的音程指示出来，以正视听。如果这个错误不及时澄清，就会干扰我们对这段资料的理解。

根据这个文献中介绍的方法，这里表达的是掐段率，对于掐段的再次分割，各弦的结果应该是：

第 1 弦：意为按住全弦的中点，即$\frac{1}{2}$处，让剩下的一半振动，那么这段有效弦长是$\frac{1}{2}$，得高八度 sa。

第 2 弦：掐段率为半弦之半，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，相对弦长 $=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$　得纯四度 ma

第 3 弦：掐段率为全弦之$\frac{1}{3}$，相对弦长 $=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$　得纯五度 pa

第 4 弦：sa - pa 的掐段率为$\frac{1}{3}$，这个掐段率再次三分，得$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

掐去这段，相对弦长 $=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$　得大全音 ri

第 5 弦：sa - pa 的掐段率为$\frac{1}{3}$，对这个掐段率再次二分，得$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

掐去这段，相对弦长 $=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$　得纯律小三度 ga

第 6 弦：pa - sa 的掐段率为$\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$，与相对弦长的差数相等，$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

对这个掐段率再次二分，得$\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

高 8 度 sa 的有效弦长再加上这段，相对弦长 $=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$　得特大六度 dha

第 7 弦：已知 pa - sa 的掐段率为$\frac{1}{6}$，取其$\frac{2}{3}$，得这部分掐段率为$\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$

此弦总掐段率为$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{4}{9}$，相对弦长 $=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$　得纯律小七度 ni

第 8 弦：sa - ri 的掐段率为$\frac{1}{9}$，取其$\frac{2}{3}$，这里的掐段率为$\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

掐去这段，相对弦长 $=1-\frac{2}{27}=\frac{25}{27}$　得近似中二度 komai（半降）ri

第 9 弦：sa - dha 的掐段率为$\frac{5}{12}$（$1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$），这里的掐段率为$\frac{5}{12}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{24}$

掐去这段，相对弦长 $=1-\frac{5}{24}=\frac{19}{24}$　得近似大三度 tīvra ga

第 10 弦：升 ga - sa 的掐段率为 $-\frac{5}{24}+\frac{1}{2}=\frac{7}{24}$，取其$\frac{1}{3}$，得这段掐段率为$\frac{7}{24}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{72}$

此弦的总掐段率为$\frac{5}{24}+\frac{7}{72}=\frac{15+7}{72}=\frac{22}{72}=\frac{11}{36}$，相对弦长 $=1-\frac{11}{36}=\frac{25}{36}$　得半减五度 tīvra ma

第 11 弦：pa - sa 的掐段率为$\frac{1}{6}$，再三分，$\frac{1}{6}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$此弦总掐段率为$\frac{1}{3}+\frac{1}{18}=\frac{7}{18}$

掐去这段，相对弦长 $=1-\frac{7}{18}=\frac{11}{18}$　得中六度 komai（半降）dha

第 12 弦：降 dha - sa 的掐段率为$\frac{1}{2}-\frac{7}{18}=\frac{9-7}{18}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$，取其$\frac{2}{3}$

得这段掐段率为$\frac{1}{9}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$；此弦总掐段率为$\frac{7}{18}+\frac{2}{27}=\frac{21+4}{54}=\frac{25}{54}$

掐去这段，相对弦长$=1-\frac{25}{54}=\frac{29}{54}$　得中七度 tīvra ni

根据以上方法所得到12个音的相对弦长与上边所引的资料中左边的比例恰为倒数。为清晰起见，制表如下：

表 80

相生次第		音名	按音节点	掐段率‖有效弦长	相对波长	音程系数
第 1 弦	自然音级	sa	全弦的$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$‖$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2
第 2 弦		ma	半弦的$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$‖$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
第 3 弦		pa	全弦的$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$‖$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$
第 4 弦		ri	sa－pa 的$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$‖$\frac{8}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{8}$
第 5 弦		ga	sa－pa 的$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$‖$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{5}$
第 6 弦		dha	pa－sa 的$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{12}$‖$\frac{7}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{12}{7}$
第 7 弦		ni	pa－sa 的$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$‖$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{9}{5}$
第 8 弦	变化音级	komai－ri	sa－ri 的$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{27}$‖$\frac{25}{27}$	$\frac{25}{27}$	$\frac{27}{25}$
第 9 弦		tīvra－ga	sa－dha 的$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$‖$\frac{19}{24}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{24}{19}$
第 10 弦		tīvra－ma	tīvra ga－sa 的$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{36}$‖$\frac{25}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{36}{25}$
第 11 弦		komai－dha	pa－sa 的$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$‖$\frac{11}{18}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{18}{11}$
第 12 弦		tīvra－ni	komai dha－sa 的$\frac{2}{3}$	$\frac{25}{54}$‖$\frac{29}{54}$	$\frac{29}{54}$	$\frac{54}{29}$

可以通过弦长划分示意图来理解上述数据。

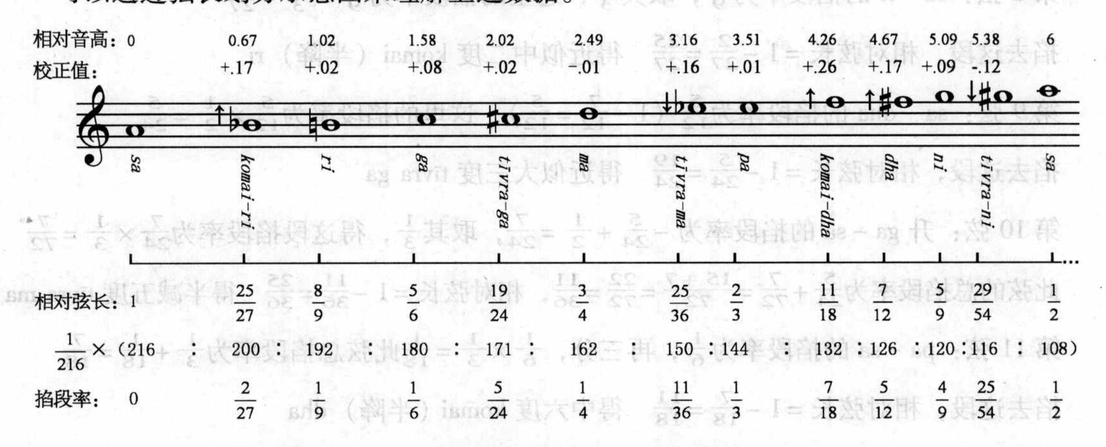


图 26　彭迪达掐段率的图示

表 81 按音高顺序排列制表

音名	sa	komai – ri	ri	ga	tīvra – ga	ma	tīvra – ma	pa	komai – dha	dha	ni	tīvra – ni	sa
掐段率	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{36}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{25}{54}$	$\frac{1}{2}$
相对弦长	1	$\frac{25}{27}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{19}{24}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{29}{54}$	$\frac{1}{2}$
相对音高	0	0.666	1.02	1.58	2.02	2.49	3.16	3.51	4.26	4.67	5.09	5.38	6
相邻音程系数		$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{20}{19}$	$\frac{19}{18}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{25}{24}$	$\frac{12}{11}$	$\frac{22}{21}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{30}{29}$	$\frac{29}{27}$
相邻音差		0.666	0.35	0.56	0.44	0.47	0.666	0.35	0.75	0.4	0.42	0.29	0.62

很显然，这个结果既不完全符合三分三倍相生律，也不完全符合纯律，是个不规则的十二律。但在音乐效果上却是与印度音乐的实际更接近，特别是第二、七、九、十、十二级各音都已具有中立音性质。这是一个重要的调律方案，不过，著者并没有对律制建设继续探索。而后来的音乐学家将注意力主要集中在对拉格的整理研究上，所以在关于印度音乐体系的研究方面，音律制度的研究仍是空白。

三、帕特肯代所创立的拉格分类法之得与失

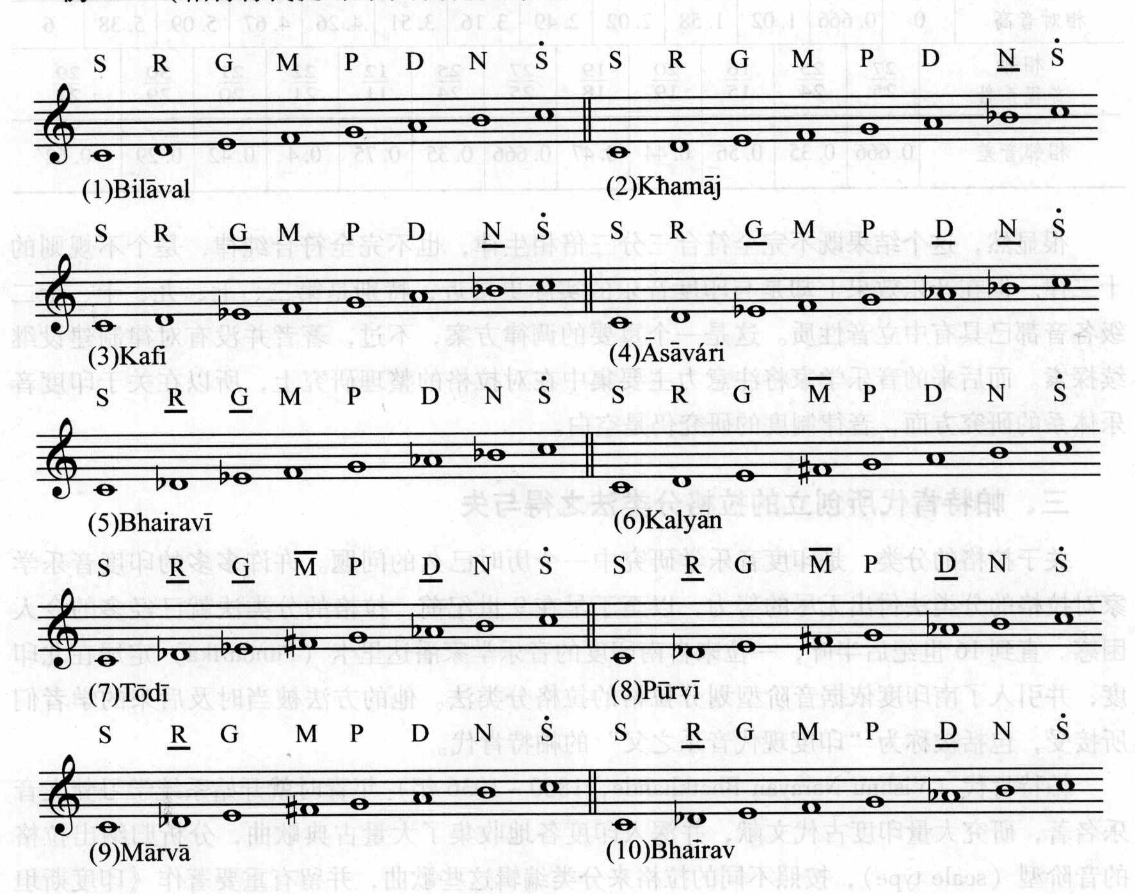
关于拉格的分类，是印度音乐学研究中一个历时已久的问题。许许多多的印度音乐学家对拉格的分类法付出无尽的努力，以至于早在 9 世纪前，拉格的分类法就已经多的令人困惑。直到 16 世纪后半叶，一位来自南印度的音乐学家潘达里卡（Pundarika）定居在北印度，并引入了南印度依据音阶型划分拉格的拉格分类法。他的方法被当时及后来的学者们所接受，包括被称为“印度现代音乐之父”的帕特肯代。

帕特肯代（Vishnu Narayan Bhatkhande，1860 ~ 1936 年）年青时就开始系统学习梵文音乐名著，研究大量印度古代文献，并深入印度各地收集了大量古典歌曲，分析归纳出拉格的音阶型（scale type），按照不同的拉格来分类编辑这些歌曲，并留有重要著作《印度斯坦音乐体系》、《北印度音乐概论》等等。他的研究成果对印度当代音乐学研究工作是最有影响力的。他提出的条理而有效的拉格分类法是基于他所分析归纳出的印度北方 10 种音阶型，以传统音名 Sa、Ri、Ga、Ma、Pa、Dha、Ni 为基础。

例 19 所列 10 种音阶型主要是以三分三倍相生律为七声音阶的基础，并以等音关系来解释音阶结构。当然帕特肯代本人很清楚，还存在着一些重要的拉格种类，无法并入这 10 种框架中。比如 Patdip 型（S R $\underline{G}$ M P D N）的三级音为降音，Ahir bhairav 型（S $\underline{R}$ G M P D $\underline{N}$）的二级音、七级音为降音，以及 Madhuvanti 型的（S R $\underline{G}$ $\overline{M}$ P D N）三级为降、四级为升，这三种音阶结构以三分三倍的相生逻辑来看，在音律关系上是矛盾的。另外 Lalit 型（S R G M $\overline{M}$ $\underline{D}$ N）缺五音，却同时存在自然四级音和变化四级音。其他还有在 Ri、Ga、Ma、Dha 和 Ni 上分别同时存在自然音级与变化音级的情况，这些都无法归入例 19 所列的这 10 种类

型中。此外，有些拉格框架只包含六个或五个音级而无法明确应归入哪种拉格音阶型。本来这些具有同名变化音级、五声或六声的拉格框架为演唱中的即兴发挥留下了丰富的空间，却遭遇了与三分三倍相生律固有逻辑的冲突。所以，对于这个在久远的古印度时代就形成的对细微音高的分辨及应用形态，用三分三倍相生十二律作为乐制基础必然捉襟见肘。

例 19 （帕特肯代提出的十种音阶型）①



现在，在南亚地区，人们为了保持斯鲁蒂的传统，在十二律中，以 sa 和 pa 作为固定音，其他 10 个音中，有五个音可以加升高音，有五个音可以加降低音，一共凑齐 22 个音律，这样就可以沿袭印度律学传统名词，但这与婆罗多和娑楞伽提婆所描述的根据纯律建立起来的 22 律制是不同的。

① 引自 *The Raga Guide*：*Raga classification*，见网页 http：//www. wyastone. co. uk/nrl/world/raga/intro3. html（2004～）。

第四章 阿拉伯—波斯人的律学成就

生活在美索不达米亚地区的先民，苏美尔人（Sumerians）、亚述人（Assyria）、赫悌人（Hitties）等等，很早就已经有使用琉特类乐器的经验。苏美尔人是数学天才，琉特琴清楚地显示出的弦长比例变化和音高变化之间的关系是很容易被发现的。从一些出土的公元前10世纪时的泥板书残片上，人们得到了一些关于音响体系（乐律）结构和有关弦乐器定弦的信息。根据一些泥板书上的记载，学者们认为，至少在公元前10世纪时，美索不达米亚的音乐就已经是以七声音阶的音响体系为基础，在一种七声音阶中有不同的调式。随着科学的发展，以数学为基础的音响学应运而生。通过演奏弦乐器，人们逐渐认识到按照1∶2、2∶3、3∶4、4∶5、5∶6这些弦长比例关系可以奏出八度、五度、四度和好听协和的大、小三度音程。后来成长于古希腊的毕达哥拉斯音响学理论显然与它是有联系的。

在伊斯兰教诞生以前（公元622年以前）的阿拉伯历史被称为“蒙昧时期”，那时已经有很多种为歌唱伴奏的乐器，包括琉特类乐器。正统哈里发时期（四代哈里发，从公元632~661年），音乐曾经被禁止，到第四代哈里发（656~661年），音乐重又得到鼓励。在伍麦叶王朝时期（公元661~750年），阿拉伯音乐得到全面发展，音乐家不仅有优厚的待遇，还常在国内外旅行，吸收了波斯和希腊等地的音乐及理论，大大丰富了阿拉伯音乐。公元750年，阿拔斯王朝取代了伍麦叶王朝，建都于巴格达。他们的强盛持续了500年之久，直到1258年被蒙古人推翻。阿巴斯王朝被称为阿拉伯音乐的黄金时代。这一时期的音乐多受波斯影响，音乐理论则受到希腊、尤其是毕达哥拉斯学派的影响。

第一节 量音理论（Theory of measuration）

阿拉伯人自古就有量音理论，就是以注意弦振动段的长度比例关系，并以此来理解不同音律间的音程关系。这一理论方法为音律实践带来了规范性和多样性。

规范性是指在定弦过程中，以较低弦四等分掐去一段（四分损一），按弦奏出的音高作为相邻的较高弦的空弦音高。相邻两弦就形成纯四度关系（相对波长$\frac{3}{4}$）。

多样性是指有多种多样的掐段长度，留下了多样的振动段长度，通过量振动段的长度，来把握音高之间的音程关系。

阿拉伯人在中世纪时又继承了古希腊文明，以五度相生的理论为认识基础，在琵琶式的拨弦乐器乌德（Ud）上以纯四度关系定弦并使用四音列理论解释调式音阶。

一、三分三倍相生最初的九律

9 世纪阿拉伯哲学家、音乐理论家阿尔·法拉比（Abū Nasr al-Fārābī，公元 870 ~ 950 年）在他的重要著作《音乐全书》（［Kitāb al-mūsiqi al-kabir］*Major Book on Music*）① 中记录了非常关键的信息：根据法拉比的记述，他们所用的方法就是这种量音术。即以一弦为基音（C），将全弦四等分，去其一分，有效弦长为$\frac{3}{4}$，即得上方纯四度（F）；全弦三等分，去其一分（三分损一），有效弦长为$\frac{2}{3}$，即得上方纯五度（G）；纯五度音的有效弦长再次四等分，去其一分，还剩有效弦长为$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$，即基音的高八度（c）。如此三分三倍依次相生，纯八度内产生最初的不平均九律：

表 82

借用现代音名	^{b}a		^{b}e		^{b}b		f		c		g		d		a		e
相对弦长	$\frac{81}{128}$	←	$\frac{27}{32}$	←	$\frac{9}{16}$	←	$\frac{3}{4}$	←	1	→	$\frac{2}{3}$	→	$\frac{8}{9}$	→	$\frac{16}{27}$	→	$\frac{64}{81}$
相对音高（全音）	3.96		1.47		4.98		2.49		0		3.51		1.02		4.53		2.04

按音高顺序列表如下：

表 83

借用现代音名	c	d	^{b}e	e	f	g	^{b}a	a	^{b}b	c^{1}
相对弦长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音)	0	1.02	1.47	2.04	2.49	3.51	3.96	4.53	4.98	6

二、法拉比《音乐全书》中记录的乌德琴定弦法

根据法拉比的记述，② 乌德琴上的四根弦各自相隔纯四度。根据他对具体品位（fret）所做的弦长划分，可以分析出其定制过程是这样的：

食指品位是对全弦做九等分并去其一分，该品位相对弦长界定为$\frac{9-1}{9}=\frac{8}{9}$；

---

① *Kitāb al-mūsiqi al-kabir*（《音乐全书》）有 Farmer，H. G. 的英译本：收入丛书 *Studies in Oriental Musical Instruments*，*First and Second Series.* 第二卷 Longwood Press Ltd.，Tortola，British Virgin slands.（1978）. D' Erlanger，R.，Bakkouch，'A. 'A.，and Al-Sanusi，M. 的法文译本：收入 *La Musique Arabe.*（Vol. 1，1930；Vol. 2，1935；Vol. 3，1938；Vol. 4，1939；Vol. 5，1949；Vol. 6，1959）. Librairie Orientaliste Paul Geuthner，Paris，France.

② Forster 译自法文译本 *La Musique Arabe*，Volume 1，第 166 – 174 页. 转引自 Cris Forster Musical Mathematics：*A Practice in the Mathematics of Tuning Instruments and Analyzing Scales*《音乐数学：在调律与音律分析中的运用》一书的网上书稿，第 11 章 "世界各国的音体系" /第四节 "阿拉伯、波斯、土耳其音乐" 之 54 "阿尔 – 法拉比的乌德"，见. chrysalis 基金会网页 http：//www.chrysalis-foundation.org（2000 ~ 2006 年），据该网页公告，此书稿将于 2007 年春出版。法拉比《音乐全书》的英译本又见 Farmer，H. G.（1957）. "*The Music of Islam.*" In New Oxford History of Music，Volume 1：*Ancient and Oriental Music*，E. Wellesz，Editor，Oxford University Press，London，England，1960.

无名指品位是将食指品位到琴码这两点距离再次九等分并去其一分，该品位相对弦长界定为$\frac{8}{9}\times\frac{9-1}{9}=\frac{64}{81}$；

小指品位是对全弦做四等分并去其一分，该品位相对弦长界定为$=\frac{4-1}{4}=\frac{3}{4}$；

二弦散声的相对波长＝一弦小指品位音高＝一弦之$\frac{3}{4}$振动弦长$=\frac{3}{4}$；

三弦散声的相对波长＝二弦小指品位音高＝二弦之$\frac{3}{4}$振动弦长$=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{16}$；

四弦散声的相对波长＝三弦小指品位音高＝三弦之$\frac{3}{4}$振动弦长$=\frac{9}{16}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{64}$；

五弦散声的相对波长＝四弦小指品位音高＝四弦之$\frac{3}{4}$振动弦长$=\frac{27}{64}\times\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$

下列这个音位图（乌德琴上的音位图①）是公元9世纪时的实践，第五弦是由再里亚布（Ziryab，巴格达人，定居在西班牙安达卢西亚省的科尔多瓦，活动时间约在公元820～850年左右）添加的。

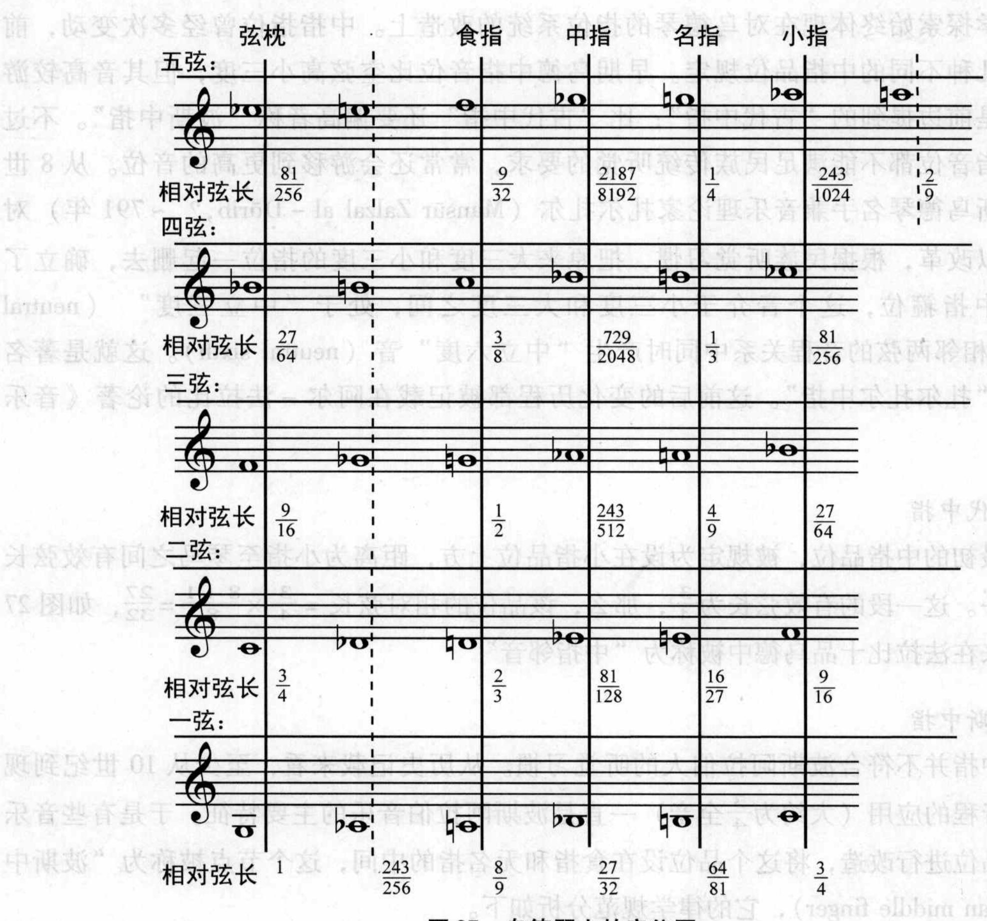


图27　乌德琴上的音位图

① 引自《格罗夫音乐与音乐家辞典》阿拉伯条目第516页表一，这个音位图来自9世纪阿拉伯哲学家、音乐理论家阿尔－肯迪（Abū Yūsuf Al-KindĪ，801～873年）的著作。

在这个音位图中，食指上方还有一个相邻品位。根据法拉比所给的条件，这个相邻品位距离“古代中指”品位①是该中指品位有效弦长的$\frac{1}{8}$。由此可以求出：

这个“相邻中指”品位的相对弦长 $=\frac{27}{32}\times\frac{8+1}{8}=\frac{243}{256}$

可见这个品位与弦枕之间形成一个“林玛半音”，即我们所熟知的五度律小半音。五弦小指品位下方还有一个品位，与三弦第三品位构成纯八度，与五弦散声构成一个增四度，实际相对波长为$\frac{4}{9}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{9}$或$\frac{81}{256}\times\frac{512}{729}$（增四度）$=\frac{2}{9}$，相对音高为 6 + 6 + 1.02 全音。

三、中指品位的改造

由于古代阿拉伯的乐制与乌德琴紧密联系，所以，有关阿拉伯音乐的特征性中立音程的乐器学探索始终体现在对乌德琴的指位系统的改造上。中指指位曾经多次变动，前后出现过几种不同的中指品位规定。早期乌德中指音位比空弦高小三度，但其音高较游移，这就是前边提到的“古代中指”；比“古代中指”还要偏高者称“波斯中指”。不过这两个中指音位都不能满足民族传统听觉的要求，常常还会游移到更高的音位。从 8 世纪起，波斯乌德琴名手兼音乐理论家扎尔扎尔（Mansūr Zalzal al - Ḍārib，？ ~791 年）对乌德琴加以改革，根据民族听觉习惯，把原来大三度和小三度的指位一起删去，确立了一个新的中指箍位，这个音介于小三度和大三度之间，处于“中立三度”（neutral third）；在相邻两弦的音程关系中同时产生“中立六度”音（neutral sixth）。这就是著名的阿拉伯“扎尔扎尔中指”。这前后的变化历程都被记载在阿尔 - 法拉比的论著《音乐全书》中。

1. 古代中指

这是最初的中指品位，被规定为设在小指品位上方，距离为小指至琴马之间有效弦长的八分之一。这一段的有效弦长为$\frac{3}{4}$，那么，该品位的相对弦长 $=\frac{3}{4}\times\frac{8+1}{8}=\frac{27}{32}$，如图 27 所示。后来在法拉比十品乌德中被称为“中指邻音”

2. 波斯中指

古代中指并不符合波斯阿拉伯人的听觉习惯。从历史记载来看，至少从 10 世纪到现在，中立音程的应用（大约为$\frac{3}{4}$全音）一直是波斯阿拉伯音乐的主要特征。于是有些音乐家对中指品位进行改造，将这个品位设在食指和无名指的中间，这个节点被称为“波斯中指”（Persian middle finger），它的律学规范分析如下。

波斯中指位于食指品位到无名指品位这两点距离的中点。该品位的相对弦长可以通过以下步骤求出：

① “古代中指”品位的弦长比条件见下一节详释。

食指品位与无名指品位这两点距离的中点的有效弦长

=（食指品位的有效弦长 + 无名指品位的有效弦长）÷2

= $(\frac{8}{9}+\frac{64}{81})\div 2=\frac{72+64}{81}\div 2=\frac{68}{81}$

由此可知，波斯中指品位的相对弦长为$\frac{68}{81}$，相对音高为1.51全音。

3. 扎尔扎尔中指

它的品位介于无名指和"波斯中指"的中间，那么，其律学规范也可以经过如下步骤解析如下：

波斯中指品位与无名指品位这两点距离的中点的有效弦长

=（波斯中指品位的相对弦长 + 无名指品位的相对弦长）÷2

= $(\frac{68}{81}+\frac{64}{81})\div 2=\frac{68+64}{81}\div 2=\frac{66}{81}=\frac{22}{27}$

由此可知，"扎尔扎尔中指"的相对弦长为$\frac{22}{27}$，相对音高为1.77全音。

四、特殊音程的历史价值

阿尔·法拉比是第一位记述"波斯中指"和"扎尔扎尔中指"的理论家，有学者曾对他做出这样的评价："The first description of instruments of music in any language was contributed by Al – Farabi, and that was six hundred years before any other land had considered the subject sufficiently interesting for serious study."① [Farmer, H. G. 语"在任何其他国度的（学者）认识到（量音术）这个学科对严肃的学术研究是重要而值得关注的之前，法拉比已经早前600年就创用了描述乐器（振动长度的）研究方法。"] 他展示给我们的这几个音程：托勒密小二度$\frac{17}{18}$②、扎尔扎尔中指中立三度$\frac{22}{27}$、和波斯中指小三度$\frac{68}{81}$成为重要的历史性律学内容，显示出律学探索领域的极高成就。

1. 以质数17构成的近似平均律音程

古代阿拉伯学派早就得出的"波斯中指"的比率（$\frac{68}{81}$）比毕达哥拉斯律小三度（$\frac{27}{32}$）更加接近后世的十二平均律，托勒密小二度$\frac{17}{18}$也比林玛半音$\frac{243}{256}$更精确，比率关系也更符合简单整数比的审美原理。通过因数分解，波斯中指的律学规范与托勒密小二度有着同样的质数17，波斯中指和托勒密小二度之间正是一个大全音：$\frac{68}{81}\div\frac{17}{18}=\frac{8}{9}$。托勒密小二度虽然早在公元1～2世纪时就被提出，但似乎没有被运用。这表明只是数学理论家可以在数理领域找到它，而不是出自音乐实践的必然推动力。法拉比提出的"波斯中指"，不仅是出于音

① *The Sources of Arabian Music*, p. XX. E. J. Brill, Leiden, Netherlands.（1965）.

② 克劳迪亚斯·托勒密（Cluadius Ptolemy，数学家兼天文学家，公元83～165年）在他的伟大著作*Harmonics*（《谐和论》）一书中，第一个对大全音进行算术划分，得到小二度$\frac{17}{18}$，以及一系列更小的音程$\frac{36}{35}$、$\frac{35}{34}$、$\frac{34}{33}$、$\frac{33}{32}$。法拉比把小二度描述为"半音程"（semitone），另外4个更小的音程是四分音。

乐实践对中立音理论解释的呼唤，还将原已达到的数理规定性与音乐实践结合起来，以大全音音程这种音乐进行中的主角链接起相隔近千年的两个成果。同时也为后世探索十二平均律提供了素材。

2. “四分音”（quarter - tones）的律学本质

法拉比对“四分音”给出了几种律学解释，根据求“扎尔扎尔中指”品位和无名指品位之间的音程系数，可以求出一种“四分音”音程：

无名指品位音程系数 - “扎尔扎尔中指”品位音程系数

$=\frac{81}{64}\div\frac{27}{22}=\frac{33}{32}$（0.27 全音）

他还描述了另外几种四分音音高的比例关系$\frac{35}{36}$（0.24 全音）、$\frac{34}{35}$（0.25 全音）、$\frac{33}{34}$（0.26 全音）。

从这几种四分音的长度比来看，生律因素都已超出了已有的质数规范，分别以质数 11、17、7 作为生律因子。

以质数 7 作为生律因子的音乐实践早在中国的琴律中存在，但并没有作为理论律学而是作为应用律学记载在斫琴定律方法中。

质数 17 是平均律探索的早期钥匙，它可以构成十二平均律半音和二十四平均律四分音。

质数 11 则是典型中立音的生律因子。

3. 中立音程（neutral - tones）的由来

中指音位被不断改造这个历史事实记录了波斯 - 阿拉伯人在文化听觉上对中立音的选择和理论上的不断探索。今天，从声学和数理的角度，我们很清楚地知道中立音的自然音响根据是谐音列第 11 分音和第 13 分音，古代波斯 - 阿拉伯人在这个自然音响的基础上做出了审美选择，并通过乐器调律手段将这个音响物化显现在乌德琴的指位上，从乐器机制的层面保护了民族乐制。法拉比、伊本·西纳等人又从理论的角度记录下了这个调律方案，使经验升华为理论，成为历史文本而存留千古。

根据“扎尔扎尔中指”，同样可以求出中立二度，即“四分之三音”：

“扎尔扎尔中指”品位相对弦长 - 食指品位相对弦长

$=\frac{22}{27}\div\frac{8}{9}=\frac{11}{12}$（0.75 全音）

由于“扎尔扎尔中指”体现的特殊三度音程正好介于大三度和小三度之间，小于大三度 0.27 全音，大于小三度 0.3 全音，在西方晚后的乐律学理论中称其为中立三度（neutral third）；“四分之三音”也正介于大二度和小二度之间，小于大二度 0.27 全音，大于小二度 0.3 全音，同理，可称其为中立二度（neutral second）。在乌德的四弦各品位上，可以派生出各种中立音程。比如中立三度移位到相隔纯四度的邻弦，就可以获得中立六度：

中立三度＋纯四度＝中立六度

$$\frac{22}{27} \times \frac{3}{4} = \frac{11}{18}$$

中立三度移位到相隔纯五度的邻弦，就可以获得中立七度：

中立三度＋纯五度＝中立七度

$$\frac{22}{27} \times \frac{2}{3} = \frac{44}{81}$$

这样的乌德琴可以满足阿拉伯人的审美听觉观念。

第二节　乌德品位记录下的律学成就

一、阿尔·法拉比的10个乌德品位

在食指品位到弦枕之间还有几个品位，分别被阿尔·法拉比解释为：①

第一品，法拉比虽然并没直接给出弦长比值，但他提到这个音程与小指至无名指间的音程相同。根据这个条件，设第一品为X，可以列出如下比例式：

该品位有效弦长：空弦弦长＝小指品位的有效弦长：无名指品位的有效弦长

$$X : 1 = \frac{3}{4} : \frac{64}{81}$$

$$X = \frac{3}{4} \div \frac{64}{81} = \frac{243}{256}$$

由此可知：第一品相对弦长$=\frac{243}{256}$，相对音高为0.45全音。

第二品，位于食指品位与弦枕这两点距离的中点。

该品位的有效弦长＝（食指品位的有效弦长＋空弦弦长）÷2

$$= \left(\frac{8}{9}+1\right) \div 2 = \frac{8+9}{9} \div 2 = \frac{17}{18}$$

故第二品的相对弦长为$\frac{17}{18}$，相对音高为0.49全音。这个音位也被称为“食指的邻音”和“托勒密品位”。

第三品，位于波斯中指品位与弦枕这两点距离的中点。

该品位的有效弦长＝（波斯中指品位的有效弦长＋空弦弦长）÷2

$$= \left(\frac{68}{81}+1\right) \div 2 = \frac{68+81}{81} \div 2 = \frac{149}{162}$$

故第三品相对弦长为$\frac{149}{162}$，相对音高为0.72全音。

第四品，位于扎尔扎尔中指品位与弦枕这两点距离的中点。

该品位的有效弦长＝（扎尔扎尔中指品位的有效弦长＋空弦弦长）÷2

---

① 转引自《音乐数学》之“阿尔－法拉比的乌德”一节。原英译文资料见 Farmer，H. G.（1957）“*The Music of Islam.*” In *New Oxford History of Music*, Volume 1：*Ancient and Oriental Music*，E. Wellesz，Editor，Oxford University Press，London，England，1960. p. 460.

$= \left(\frac{22}{27}+1\right) \div 2 = \frac{22+27}{27} \div 2 = \frac{49}{54}$

故第四品相对弦长为$\frac{49}{54}$，相对音高为 0.84 全音。

以上前四个品位音都被称为“食指的邻音”。

将以上讨论过的所有品位及散声总计起来，每弦可发出 11 个音。下表列出一弦上散声与各品位相对弦长，将这十品的相对弦长乘以其他各弦散声，就得到其他四弦各品位上的相对波长和相对音高。

表 84

一弦散声及品位	弦枕	一品	二品	三品	四品	五品	六品	七品	八品	九品	十品
相对弦长	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{149}{162}$	$\frac{49}{54}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{68}{81}$	$\frac{22}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$
相对音高（全音数）	0	0.45	0.495	0.72	0.84	1.02	1.47	1.51	1.77	2.04	2.49
相对音高（音分数）	0	90	99	144	168	204	294	302	354	408	498

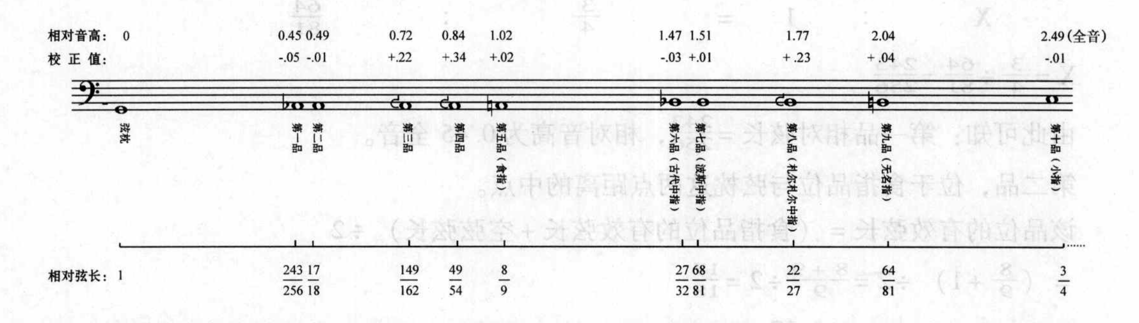


图 28　阿尔·法拉比 10 品乌德一弦音位图

二、四弦十品乌德琴音位图

法拉比对上述 10 个品位的设定还作了进一步的说明。他说这些品位并不全都被应用在音乐实践中，他只是提供了最多的可能性，而很多音乐家更愿意在乌德琴上选用第四、五、六、七品。这可能是他不为第二、三、四品命名的原因，只是称它们为“某指的邻居”。他虽然对一品在弦上的具体位置有详细的描述，但并没有提供在弦上布品的数学方法，后来在 13 世纪波斯哲学家、音乐理论家萨菲丁（Ṣafī al-Dīn al-Urmawi，1230～1294 年）的著作《作曲论》（*Kitab al-adwar*）中叙述了法拉比的数理规定。从萨菲丁的记述中，我们了解到法拉比对四分之三音程、即中立音程的律学解释，以及他早已给出 12∶11 的比值；11 世纪另一位伊朗音乐理论家阿维森那（Avicenna，公元 980～1037 年，即伊本·西那）

则给出 13：12 的比值。他们分别对中立音程从理论上做出规定，其中法拉比的理论解释影响较大。根据上述音位图和四弦之间的关系，法拉比的 10 个乌德品位在各条弦上产生下列各音：

弦	岳山	一品	二品	三品	四品	五品	六品	七品	八品	九品	十品
音名	$^{b}e^{1}$	H $^{b}f^{1}$		$^{¢}f^{1}$		Y f^{1}	LA $^{b}g^{1}$	T	S $^{¢}\dot{g}^{1}$	N g^{1}	D $^{b}a^{1}$
IV	$\frac{27}{64}$	$\frac{6561}{16384}$	$\frac{51}{128}$	$\frac{149}{384}$	$\frac{49}{128}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{729}{2048}$	$\frac{17}{48}$	$\frac{11}{32}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{81}{256}$
音名	D ^{b}b	$^{b}c^{1}$		$^{¢}c^{1}$		T c^{1}	W $^{b}d^{1}$	S	Dh $^{¢}d^{1}$	M d^{1}	F $^{b}e^{1}$
III	$\frac{9}{16}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{149}{288}$	$\frac{49}{96}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{243}{512}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{27}{64}$
音名	F	J ^{b}G			$^{¢}G$	$\dot{H}$ $\dot{G}$	$\dot{G}$ ^{b}A	R	$\underline{H}$ $^{¢}A$	L A	$\acute{A}$ ^{b}B
II	$\frac{3}{4}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{17}{24}$	$\frac{149}{216}$	$\frac{49}{72}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{17}{27}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$
音名	A C	B ^{b}D		$^{¢}D$		Z D	Dh ^{b}E	Q	Th $^{¢}E$	K E	S F
I	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{17}{18}$	$\frac{149}{162}$	$\frac{49}{54}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{68}{81}$	$\frac{22}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$
	岳山	一品 食指邻音	二品 食指邻音	三品 食指邻音	四品 食指邻音	五品 食指	六品 古代中指	七品 波斯中指	八品 扎尔扎尔中指	九品 无名指	十品 小指

图 29

上列音位图中的音名符号有两套系统，每弦上行为阿拉伯音名符号，下行为现代音名。根据这图，我们可以想像图 28 中的音列是这里的一弦，其他各弦依次移高纯四度，就可知各弦上的音列。

三、含中立音的四音列与调式

根据对中立音程的不同解释，可以制定出两种音阶规定。法拉比规定见表 85，伊本·西纳规定见表 86。

表 85　“法拉比规定”

阿拉伯传统唱名	雅卡赫		乌沙依朗		伊拉克		拉斯特		杜卡赫		锡卡赫		贾哈尔卡赫		那瓦
供参考的现代音名	g		a		𝄳b		c¹		d¹		𝄳e¹		f¹		g¹
弦长比例	1		$\frac{8}{9}$		$\frac{22}{27}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{11}{18}$		$\frac{9}{16}$		$\frac{1}{2}$
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$		$\frac{12}{11}$		$\frac{88}{81}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{12}{11}$		$\frac{88}{81}$		$\frac{9}{8}$	
相邻两音音程值（以全音数表示）		1.02		0.75		0.72		1.02		0.75		0.72		1.02	

表 86　“伊本·西纳规定”

阿拉伯传统唱名	雅卡赫		乌沙依朗		伊拉克		拉斯特		杜卡赫		锡卡赫		贾哈尔卡赫		那瓦
供参考的现代音名	g		a		ǂ♭b		c¹		d¹		ǂ♭e¹		f¹		g¹
弦长比例	1		$\frac{8}{9}$		$\frac{12}{13}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{8}{9}$		$\frac{8}{13}$		$\frac{117}{128}$		$\frac{1}{2}$
相邻两音音程系数		$\frac{9}{8}$		$\frac{12}{13}$		$\frac{128}{117}$		$\frac{8}{9}$		$\frac{13}{12}$		$\frac{117}{128}$		$\frac{9}{8}$	
相邻两音音程值（以音分数表示）		1.02		0.78		0.69		1.02		0.78		0.69		1.02	

（“𝄳”表示半降，“ǂ”表示半升）

前边介绍过的“波斯中指”和“扎尔扎尔中指”品位分别介入到调式音阶中，就形成了不同的四音列和不同的调式。

1．不用中指品位而以无名指品位为三音的自然调式音阶：

例 20



这是以两个相同的四音列构成的自然调式，四音列的结构是：

相对弦长：	1 : $\frac{8}{9}$: $\frac{64}{81}$: $\frac{3}{4}$				$\frac{3}{4}$: $\frac{2}{3}$: $\frac{16}{27}$: $\frac{9}{16}$			
相邻音程系数：	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	

2．以“扎尔扎尔中指”品位替换无名指品位的中立音调式音阶：

例 21



这是以两个相同的四音列构成的中立音调式，四音列的结构是：

相对弦长： $1 : \frac{8}{9} : \frac{22}{27} : \frac{3}{4} \mid \frac{3}{4} : \frac{2}{3} : \frac{11}{18} : \frac{9}{16}$

相邻音程系数： $\mid \frac{9}{8} \mid \frac{12}{11} \mid \frac{88}{81} \mid \mid \frac{9}{8} \mid \frac{12}{11} \mid \frac{88}{81} \mid$

3．以“波斯中指”品位替换无名指品位的波斯音阶：

例 22



这是以两个相同的四音列构成的普通调式，四音列的结构是：

相对弦长： $1 : \frac{8}{9} : \frac{68}{81} : \frac{3}{4} \mid \frac{3}{4} : \frac{2}{3} : \frac{17}{27} : \frac{9}{16}$

相邻音程系数： $\mid \frac{9}{8} \mid \frac{18}{17} \mid \frac{272}{243} \mid \mid \frac{9}{8} \mid \frac{18}{17} \mid \frac{272}{243} \mid$

阿尔·法拉比的律学成就不仅在于他对中立音程能够做出理论解释，更重要的是他运用的方法所具有的科学价值。他继承了前辈们的精华，比如，他继承了肯迪所运用的对音程及音阶的数学分析理论，但又清醒地不落自古希腊以来一直盛行的将音律研究附会于宇宙哲学的学术窠臼。剥离了蒙在音律音程上的黄道天常与人文结构关系的面纱，从观察弦长变化与音高之间的关系入手，掌握了自然规律并能予以总结，是世界音乐律学研究史上的杰出人物，而他所用的音程分析方法也达到了巅峰水平。

第三节　萨菲丁的不平均十七律及 12 种调式

以早在公元前就产生的毕达哥拉斯五度相生律制的标准来看，法拉比以传统的量音理论作为探索音律世界的主要手段而获得的多元化律制规定，似乎显得逻辑上不够

简洁。13 世纪时，音乐理论家萨菲丁继承本民族以量音术形成的四度相生法，这与占主流地位的古希腊律学理论是相通的。在以前九律的基础上再四度相生八次，得到不平均十七律，以求解决民族律制问题。并以这样的律制和借鉴古希腊四音列理论来创建本民族的乐学理论，虽然并没有达到相应的目的，但却产生过很大的影响。萨菲丁虽然放弃了以其他质数解释中立音的思维，但他的做法还是立足于自然律对特殊音位的把握，符合美学标准，所以说，他的十七律虽不能最终解决民族调式问题，但仍具有律学理论价值。

一、萨菲丁的不平均十七律

表 87　以相生顺序排列（以全音数为音高单位，小数点后保留两位）

律序	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	0	1	2	3	4
现代音名	♭♭d^1	♭♭a	♭♭e	♭♭b	♭f	♭c	♭g	♭d	♭a	♭e	♭b	f	c	g	d	a	e
相对弦长	$\frac{531441}{1048576}$	$\frac{177147}{262144}$	$\frac{59049}{65536}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{243}{256}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{64}{81}$
相对音高	5.88	3.39	0.90	4.41	1.92	5.43	2.94	0.45	3.96	1.47	4.98	2.49	0	3.51	1.02	4.53	2.04

表 88　按音高顺序排列

律序	0	9	14	2	7	12	4	5	10	15	1	8	13	3	6	11	16	0
音名	c	♭d	♭♭e	d	♭e	♭f	e	f	♭g	♭♭a	g	♭a	♭♭b	a	♭b	♭c	♭♭d^1	c^1
相对弦长	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{59049}{65536}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{177147}{262144}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{531441}{1048576}$	$\frac{1}{2}$
音高	0	0.45	0.90	1.02	1.47	1.92	2.04	2.49	2.94	3.39	3.51	3.96	4.41	4.53	4.98	5.43	5.88	6
相邻音程系数	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{531441}{524288}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{531441}{524288}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{531441}{524288}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{531441}{524288}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{531441}{524288}$	
相邻音高	0.45	0.45	0.12	0.45	0.45	0.12	0.45	0.45	0.45	0.12	0.45	0.45	0.12	0.45	0.45	0.45	0.12	
		$\frac{9}{8}$			$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$			$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$		

从这个表格中我们看到，每个大全音（1.02 全音）都被划分为两个小半音（0.45 全音）和一个古代音差（0.12 全音），同时也看出，整个十七律是由两个相同结构的四音列（全、全、半）连接，再续加一个大全音。萨菲丁想用这种增加律位的细密划分来解决阿拉伯民族律制的问题，现在可以分析他的十七律在调式中的运用情况。

二、萨菲丁乌德音位图展示出的四音列构成

萨菲丁曾在自己的书中绘出乌德的草图，是五弦七品，见图 30，根据他记述的指位安排，各品各弦上的音与十七律相同，各种四音列与指位组合可以一一对应。

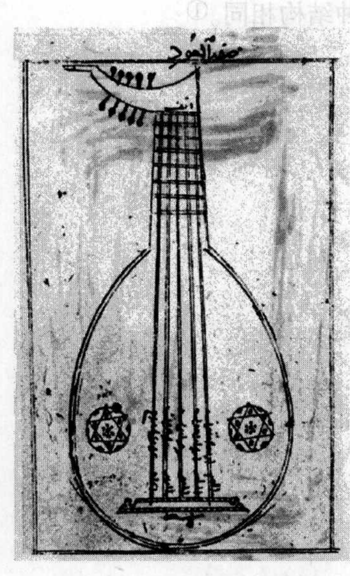


图 30　萨菲丁的乌德草图

	散声	食指		中指		无名指	小指	
Ⅰ	C	♭D	♭♭E	D	♭E	♭F	E	F
相对波长	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{59049}{65536}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{6561}{8192}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$
Ⅱ	F	♭G	♭♭A	G	♭A	♭♭B	A	♭B
相对波长	$\frac{3}{4}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{177147}{262144}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{19683}{32768}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$
Ⅲ	♭B	♭c	♭♭d	c	♭d	♭♭e		♭e
相对波长	$\frac{9}{16}$	$\frac{2187}{4096}$	$\frac{531441}{1048576}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{243}{512}$	$\frac{59049}{131072}$		$\frac{27}{64}$
Ⅳ	♭e	♭f		f	♭g	♭♭a		♭a
相对波长	$\frac{27}{64}$	$\frac{6561}{16384}$		$\frac{3}{8}$	$\frac{729}{2048}$	$\frac{177147}{524288}$		$\frac{81}{256}$
Ⅴ	♭a	♭♭b		♭b	♭c	♭♭d^1		♭d^1
相对波长	$\frac{81}{256}$	$\frac{19683}{65536}$		$\frac{9}{32}$	$\frac{2187}{8192}$	$\frac{531441}{2097152}$		$\frac{243}{1024}$

图 31

从这个音位图更加清楚地看出，食指和无名指各自可以在三个品位区域移动，中指可以掌管两个品位，通过三种指位组合，每一弦可以构成七种四音列，即：

1. 散声、食指、中指、小指的组合构成两种四音列

1）大全、小半、大全（散声、食指、中指、小指）

相 对 弦 长：1　：　$\frac{8}{9}$　：　$\frac{27}{32}$　：　$\frac{3}{4}$

相邻音程系数：｜　$\frac{9}{8}$　｜　$\frac{256}{243}$　｜　$\frac{9}{8}$　｜

这个四音列的结构与古希腊毕达哥拉斯自然四音列的第二种结构相同。①

2）小半、大全、大全（散声、食指、中指、小指）

相 对 弦 长：1　：　$\frac{243}{256}$　：　$\frac{27}{32}$　：　$\frac{3}{4}$

相邻音程系数：｜　$\frac{256}{243}$　｜　$\frac{9}{8}$　｜　$\frac{9}{8}$　｜

这个四音列的结构与古希腊毕达哥拉斯自然四音列的第三种结构相同。②

2. 散声、食指、无名指、小指组合构成三种四音列

3）大全、大全、小半（散声、食指、无名指、小指）

相 对 弦 长：1　：　$\frac{8}{9}$　：　$\frac{64}{81}$　：　$\frac{3}{4}$

相邻音程系数：｜　$\frac{9}{8}$　｜　$\frac{9}{8}$　｜　$\frac{256}{243}$　｜

① 参见第 160 页（第五章第一节），自然四音列 b。

② 参见第 161 页，自然四音列 c。

这个四音列的结构与古希腊毕达哥拉斯自然四音列的第一种结构相同。①

4）大全、减三、大半（散声、食指、无名指、小指）

相 对 弦 长：1 ： $\frac{8}{9}$ ： $\frac{6561}{8192}$ ： $\frac{3}{4}$

相邻音程系数：| $\frac{9}{8}$ | $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{2187}{2048}$ |

5）减三、大全、大半（散声、食指、无名指、小指）

相 对 弦 长：1 ： $\frac{59049}{65536}$ ： $\frac{6561}{8192}$ ： $\frac{3}{4}$

相邻音程系数：| $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{2187}{2048}$ |

3. 散声、食指、中指、小指组合构成两种四音列

6）减三、大半、大全（散声、食指、中指、小指）

相 对 弦 长：1 ： $\frac{59049}{65536}$ ： $\frac{27}{32}$ ： $\frac{3}{4}$

相邻音程系数：| $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{2187}{2048}$ | $\frac{9}{8}$ |

7）小三、小半、大半（散声、中指、无名指、小指）

相 对 弦 长：1 ： $\frac{27}{32}$ ： $\frac{6561}{8192}$ ： $\frac{3}{4}$

相邻音程系数：| $\frac{32}{27}$ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{2187}{2048}$ |

以上七种四音列是由不同品位的变化而形成。

跨越不同弦的两种四音列：

8）大半、减三、大全（食指、中指、无名指、邻弦食指）

相 对 弦 长：1 ： $\frac{2048}{2187}$ ： $\frac{27}{32}$ ： $\frac{3}{4}$

相邻音程系数：| $\frac{2187}{2048}$ | $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{9}{8}$ |

9）大全、大半、减三（食指、无名指、小指、邻弦食指）

相 对 弦 长：1 ： $\frac{8}{9}$ ： $\frac{16384}{19683}$ ： $\frac{3}{4}$

相邻音程系数：| $\frac{9}{8}$ | $\frac{2187}{2048}$ | $\frac{65536}{59049}$ |

10）大全、大半、小三（散声、食指、无名指、相邻食指）

相 对 弦 长：1 ： $\frac{8}{9}$ ： $\frac{16384}{19683}$ ： $\frac{729}{1024}$

相邻音程系数：| $\frac{9}{8}$ | $\frac{2187}{2048}$ | $\frac{32}{27}$ |

后三种四音列不可能在一条弦上产生，从图 31 所示音位图可以找到 10）减五度关系。这个特殊四音列的外框不是纯四度，而是减五度。萨菲丁想要解决阿拉伯民族律制的中立音问题，显然这不是正确途径。减五度或增四度不能代替中立音程，用五度相生或四度相生，只能通过多律位派生出类似的中立音程，而这不符合音乐内部的调律运动追求简单整

① 参见第 160 页，自然四音列 a。

数比的规律。

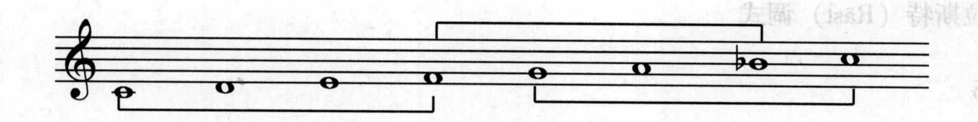
各种四音列通过不同的连接、叠加和错位叠置的方式，共形成 12 种阿拉伯调式。

三、12 种调式

阿拉伯音乐中调式数目繁多，由于四分音的介入，使调式结构变化多端，十分复杂，要想进行理论化分类非常困难，甚至要统计共有多少种都很困难。这从纲目清晰的理想化理论角度而言是不能令人满意的。萨菲丁以十七律为音律素材，以四音列为基本结构，归类出 12 种主要调式，从建立系统化理论的目标来说，应该是第一个达到这个目标的人。以下是萨菲丁记录的 12 调与十七律相配合的内容。

1）乌沙克（Uschāq）调式

例 23



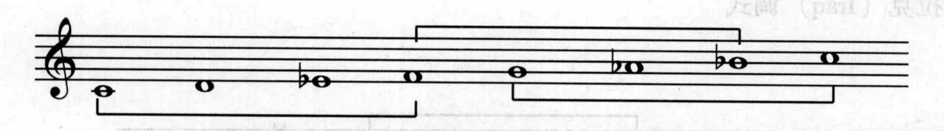
这是 3）和 1）两种四音列相隔大全音连接构成的调式，中间包含一个叠加 3）四音列。

相对弦长：$1 : \frac{8}{9} : \frac{64}{81} : \frac{3}{4}$ ‖ $\frac{2}{3} : \frac{16}{27} : \frac{9}{16} : \frac{1}{2}$

相邻音程系数：| $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{256}{243}$ | ‖ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ |

2）那瓦（Nawā）调式

例 24



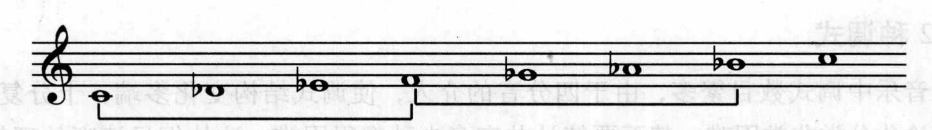
这是 1）和 2）两种四音列相隔大全音连接构成的调式，中间包含一个叠加 1）四音列。

相对弦长：$1 : \frac{8}{9} : \frac{27}{32} : \frac{3}{4}$ ‖ $\frac{2}{3} : \frac{81}{128} : \frac{9}{16} : \frac{1}{2}$

相邻音程系数：| $\frac{9}{8}$ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ | ‖ | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ |

3）布塞利克（Būsalīk）调式

例 25

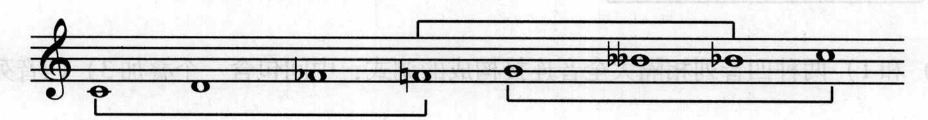


这是以两个相同的 2）四音列叠加构成的调式。

相对弦长：	1 : $\frac{243}{256}$: $\frac{27}{32}$: $\frac{3}{4}$				$\frac{3}{4}$: $\frac{729}{1024}$: $\frac{81}{128}$: $\frac{9}{16}$			
相邻音程系数：	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$		$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	

4）拉斯特（Rāst）调式

例 26

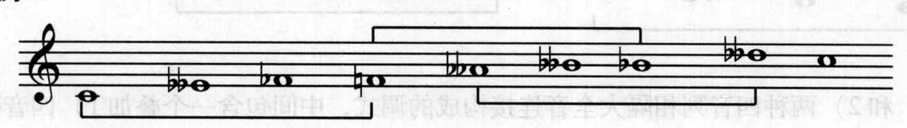


这是以 4）和 6）两种四音列相隔大全音构成的调式，中间包含一个叠加 4）四音列。

相对弦长：	1 : $\frac{8}{9}$: $\frac{6561}{8192}$: $\frac{3}{4}$				$\frac{2}{3}$: $\frac{19683}{32768}$: $\frac{9}{16}$: $\frac{1}{2}$		
相邻音程系数：	$\frac{9}{8}$	$\frac{65536}{59049}$	$\frac{2187}{2048}$		$\frac{65536}{59049}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{9}{8}$

5）伊拉克（Irāq）调式

例 27

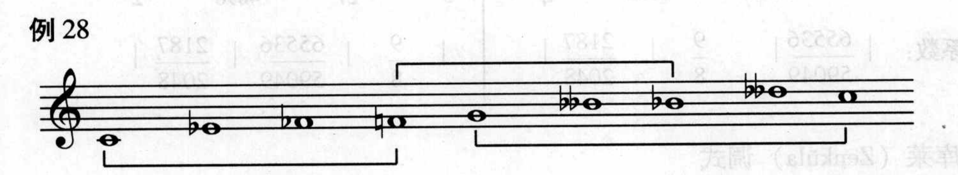


这是两个 5）四音列叠加。在这个音列中还隐含着一个 9）四音列。

相对弦长：	1 : $\frac{59049}{65536}$: $\frac{6561}{8192}$: $\frac{3}{4}$				$\frac{177147}{262144}$: $\frac{19683}{32768}$: $\frac{9}{16}$: $\frac{531441}{1048576}$		
相邻音程系数：	$\frac{65536}{59049}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{2187}{2048}$		$\frac{9}{8}$	$\frac{2187}{2048}$	$\frac{65536}{59049}$

6）伊斯法汉（Isfahān）调式

例 28

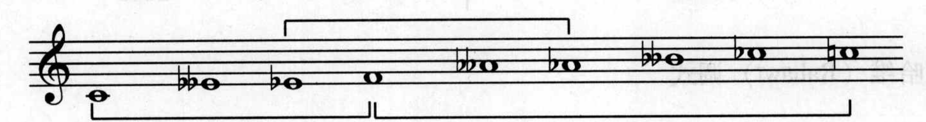


这是 7）和 6）四音列以大全音相隔连接构成的调式，6）四音列中有一个插入音，比主音低一个古代音差；中间叠加一个 4）四音列。

相对弦长：	1	:	$\frac{27}{32}$	:	$\frac{6561}{8192}$	:	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	:	$\frac{19683}{32768}$	:	$\frac{9}{16}$	:	$\frac{1}{2}$
相邻音程系数：		$\frac{32}{27}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{2187}{2048}$			$\frac{65536}{59049}$		$\frac{2187}{2048}$		$\frac{9}{8}$	

7）济拉夫坎德（Zirāfkand）调式

例 29



这个调式中含 6）和 4）两种错位叠置的四音列，在后半段纯五度框架中分为连续减三度、大半、半、大全音、大半音的若干音，这些音是其他弦的品位基础，构成特殊调式。

相对弦长：	1	:	$\frac{59049}{65536}$	:	$\frac{27}{32}$	:	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	:	$\frac{177147}{262144}$	:	$\frac{81}{128}$	:	$\frac{19683}{32768}$	:	$\frac{2187}{4096}$
相邻音程系数：		$\frac{65536}{59049}$		$\frac{2187}{2048}$		$\frac{9}{8}$			$\frac{65536}{59049}$		$\frac{2187}{2048}$		$\frac{256}{243}$		$\frac{9}{8}$	

8）布祖尔克（Buzurk）调式

例 30



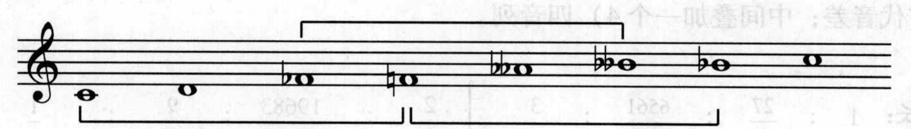
这是以 5）和 4）两个四音列中间插入一个减三度音程构成的调式，中间一个纯五度框架被划分为包含大半音、减三度、古代音差、小半音、小三度若干音程的音列。

相对弦长：$1 : \frac{59049}{65536} : \frac{6561}{8192} : \frac{3}{4}$ | $\frac{2}{3} : \frac{16}{27} : \frac{2187}{4096} : \frac{1}{2}$

相邻音程系数：| $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{2187}{2048}$ | | | $\frac{9}{8}$ | $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{2187}{2048}$ |

9）赞库莱（Zenkūla）调式

例 31



这是以4）和5）两种四音列叠加构成的调式，中间还包含一个8）四音列。

相对弦长：$1 : \frac{8}{9} : \frac{6561}{8192} : \frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4} : \frac{177147}{262144} : \frac{19683}{32768} : \frac{9}{16}$

相邻音程系数：| $\frac{9}{8}$ | $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{2187}{2048}$ | | | $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{2187}{2048}$ |

10）拉哈维（Rahāwī）调式

例 32



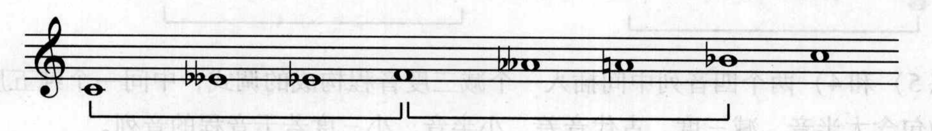
这是以5）和6）两种四音列叠加构成的调式。

相对弦长：$1 : \frac{59049}{65536} : \frac{6561}{8192} : \frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4} : \frac{177147}{262144} : \frac{81}{128} : \frac{9}{16}$

相邻音程系数：| $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{2187}{2048}$ | | | $\frac{65536}{59049}$ | $\frac{2187}{2048}$ | $\frac{9}{8}$ |

11）胡赛尼（Husayni）调式

例 33



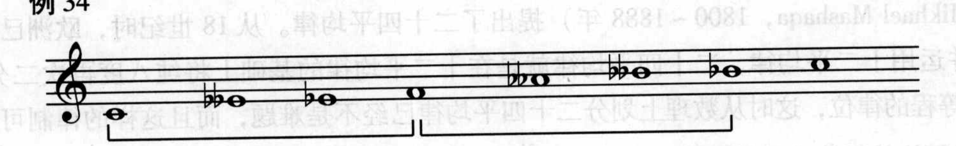
这是以6）和变形的5）四音列叠加构成的特殊调式。由于原5）式中的大全音增加一个古代音差，四音列的内部结构产生变形。

相对弦长：$1 : \frac{59049}{65536} : \frac{27}{32} : \frac{3}{4}$ ｜ $\frac{3}{4} : \frac{177147}{262144} : \frac{16}{27} : \frac{9}{16}$

相邻音程系数：｜ $\frac{65536}{59049}$ ｜ $\frac{2187}{2048}$ ｜ $\frac{9}{8}$ ｜ ｜ $\frac{65536}{59049}$ ｜ $\frac{4782969}{4194304}$ ｜ $\frac{256}{243}$ ｜

12）希贾济（Hijāzī）调式

例 34



这是以6）和5）四音列叠加构成的调式。

相对弦长：$1 : \frac{59049}{65536} : \frac{27}{32} : \frac{3}{4}$ ｜ $\frac{3}{4} : \frac{177147}{262144} : \frac{19683}{32768} : \frac{9}{16}$

相邻音程系数：｜ $\frac{65536}{59049}$ ｜ $\frac{2187}{2048}$ ｜ $\frac{9}{8}$ ｜ ｜ $\frac{65536}{59049}$ ｜ $\frac{9}{8}$ ｜ $\frac{2187}{2048}$

从上述剖析可见，萨菲丁的七品乌德，每条弦上所组成的七种四音列可以构成各种调式。虽然萨菲丁的十七律并没有真正解决阿拉伯民族律制的问题，但却在18世纪以前的几个世纪中盛行于阿拉伯国家。而且这种用四音列分类来分析调式构成，能够把纷繁多变的调式通过不同的组合化简为12种主要调式，在这12种调式基础上进行局部的微调，对于音乐家的音乐实践所具有的指导意义是不容否定的。

从历史上看，萨菲丁的地位极为重要。但从律学角度评价，他的律学成就却落后于阿尔·法拉比和波斯人伊本·西纳。他只是循着前辈的三分三倍生律方法，在原有的九律基础上继续演绎出更多律位，近似地模拟出中立音程，并未触及中立音程的自然本质。而法拉比和伊本·西纳则已经找到了直接得到中立音程的深层数理规范，前者以质数11为生律因素；后者找到了质数13的生律意义。这种以简单自然整数比为建构音程的基本观念，虽然代表了人类探索音律规律所达到的最高境界，但并没有被真正继承下来。萨菲丁虽然在13～18世纪中极负盛名，但从律学发展的角度来说，他的确是大大倒退于前人的。

四、对阿拉伯民族调式及音律特征的最终理想化保护

阿拉伯音乐文化的地域范围辖括西亚、北非，在乐制方面主要是受阿拉伯－伊朗传统音乐的影响，“四分之三音”是重要的音乐特征。而这种特征在欧洲音乐越来越全球化的背景下，从观念到理论都受到了强烈冲击。萨菲丁以三分三倍生律法为本质的十七律理论之所以能从13世纪到18世纪一直为主导理论，和这种政治、文化的全球背景是分不开的。上文已经讨论，这种律制并不能解决阿拉伯民族律制问题。音律观念上的冲突必然会促发革新的要求，古已有之的律学遗产也在等待着新时代的更新。19世纪中叶在阿拉伯，由于政治上的激励，文化方面也展开了一场复兴阿拉伯民族文化和民族艺术的运动，这就是“阿拉伯文艺复兴运动”。在这个运动中涌现出来一位杰出的音乐理论家和数学家米夏尔·穆沙卡（Mikhael Mashaqa，1800～1888年）提出了二十四平均律。从18世纪时，欧洲已经普遍接受并运用十二平均律，二十四平均律就是在十二平均律的基础上将纯八度再次二分，得到24个等程的律位，这时从数理上划分二十四平均律已经不是难题，而且这样的律制可以理想地表达阿拉伯民族音律特殊性。四分音为$\sqrt[24]{2}$，其波长比值为1.029，相对音高为0.25全音。

但事情并不这样简单，由于19世纪西方文化呈强劲态势，对阿拉伯本土音乐有着强烈冲击，一种轻视厌恶本民族音乐文化的倾向渐渐变成一种“大灾难”①。为了“以科学原理重建埃及音乐文明等等所有需要探讨的问题”。1932年在开罗举行了一次里程碑式的阿拉伯音乐大会，其中一个重要论题就是“采用特殊符号记录阿拉伯音调”②。在对17种“金斯”（jins，即可以划分为四音列或五声音阶主体的调式框架）与二十四平均律对照分析，以在四度框架内添加中立音或变化半音的不同位置分为几类四音列。

重新以法拉比时代对半音（$\frac{17}{18}$，相对音高约为0.495全音）和四分音（$\frac{35}{36}$，相对音高为0.244全音）的规定来看“金斯”中的各种四音列。

第一类，含半音的四音列：

1. 半音在上方者：大全、全、半（第二个全音是新的数理规范，略小于大全音）

相对弦长为：　$1 \quad : \quad \frac{8}{9} \quad : \quad \frac{27}{34} \quad : \quad \frac{3}{4}$

间距音程系数　$| \quad \frac{9}{8} \quad | \quad \frac{272}{243} \quad | \quad \frac{18}{17} \quad |$

相邻音差：　　1.02　　0.976　　0.495

---

① Habib Hassan Touma《十九世纪的阿拉伯音乐》，载《十九世纪东方音乐文化》一书金经言译，中国文联出版公司1985年北京第一版，36－59：57页。

② Ali.Jihad Racy（阿里·基哈德·瑞赛）“*Historical Worldviews of Early Ethnomusicologists：An East－West Encounter in Cairo*，1932”（早期民族音乐学家的世界音乐史观：东方遭遇西方，1932年在开罗）in S. Blum，P. V. Bohlman and D. Neuman，eds.，*Ethnomusicology and Modern Music History*（Urbana and Chicago：University of Illinois Press）65－91：69页

2. 半音在中间者：大全、半、全

相对弦长为： 1 ： $\frac{8}{9}$ ： $\frac{68}{81}$ ： $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{18}{17}$ | $\frac{272}{243}$ |

相邻音差： 1.02 0.495 0.976

3. 半音在下方者：半、大全、全

相对弦长为： 1 ： $\frac{17}{18}$ ： $\frac{68}{81}$ ： $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{18}{17}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{272}{243}$ |

相邻音差： 0.495 1.02 0.976

第二类，含中立音的四音列：

1. 四分之三音在上方者：大全、中二度、中二度（两种不同的中二度）

相对弦长为： 1 ： $\frac{8}{9}$ ： $\frac{105}{128}$ ： $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{1024}{945}$ | $\frac{35}{32}$ |

相邻音差： 1.02 0.695 0.776

2. 四分之三音在下方者：中二度、中二度、大全

相对弦长为： 1 ： $\frac{32}{35}$ ： $\frac{27}{32}$ ： $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{35}{32}$ | $\frac{1024}{945}$ | $\frac{9}{8}$ |

相邻音差： 0.776 0.695 1.02

第三类，含变化半音的四音列：

1. 变化半音在两端者：半、小三、半（不同于五度相生律的同名音程）

相对弦长为： 1 ： $\frac{17}{18}$ ： $\frac{27}{34}$ ： $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{18}{17}$ | $\frac{289}{243}$ | $\frac{18}{17}$ |

相邻音差： 0.495 1.5 0.495

2. 变化半音在上方者：小三、半、半

相对弦长为： 1 ： $\frac{243}{289}$ ： $\frac{27}{34}$ ： $\frac{3}{4}$

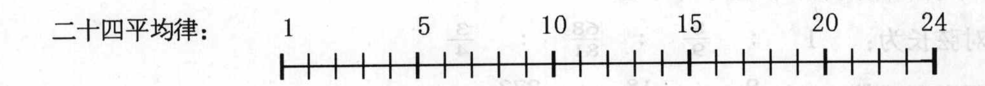
间距音程系数 | $\frac{289}{243}$ | $\frac{18}{17}$ | $\frac{18}{17}$ |

相邻音差： 1.5 0.495 0.495

以上这几类四音列可以用二十四平均律来比拟

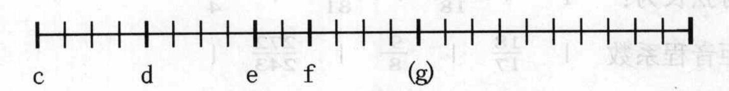
五、17 种“金斯”的音律结构

根据上列四音列的三种分类以及古希腊自然四音列，可以将如今通用的17 种“金斯”对照二十四平均律的标尺整理如下：

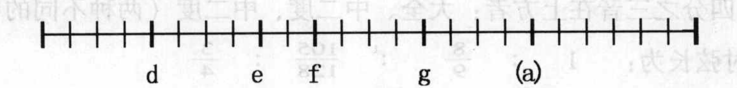


1. 自然四音列：

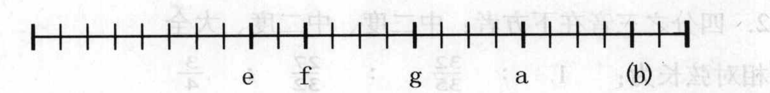
1）舍哈尔贾赫（chahārgāh），自然四音列 a 式；



2）布塞利克（busahlik），自然四音列 b 式；



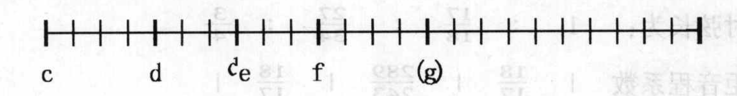
3）库尔迪（Kurdi），自然四音列 c 式。



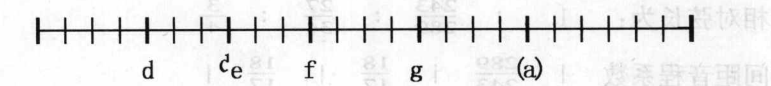
（括号内音为后一个四音列的起始音或完整五声音阶的第五音，下同）

2. 含中立音的四音列，包括非纯四度外框：

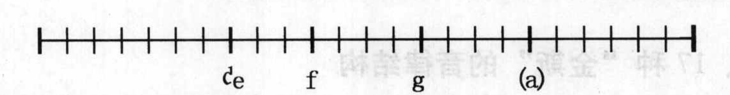
4）拉斯特（rāst），四分之三音在上方的四音列；



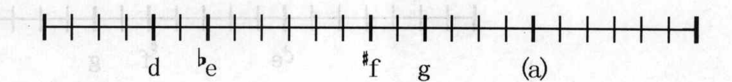
5）拜亚提（bayātī），四分之三音在下方的四音列；



6）西卡赫（sikāh），外框为半增四度的四声音阶，四分之三音在下方；

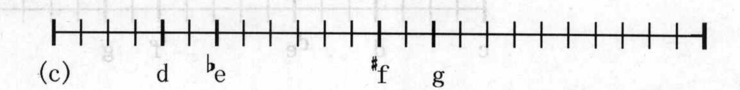


7）奈季迪（najdi），四分之三音在上方的四音列；

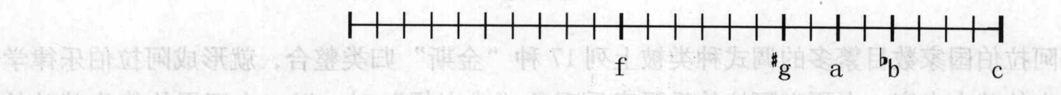


3. 含变化半音的四音列：

8）希贾济（hijāzī），变化半音在两端的四音列；



9）奈季里兹（nagrīz），变化半音在两端的四音列；



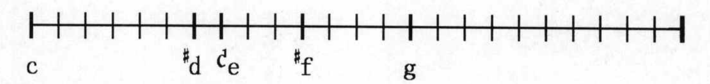
（括号内音为前一个四音列的末音或添加构成完整五声音阶）

10）西派赫尔（sipahr），变化半音在上端的四音列；

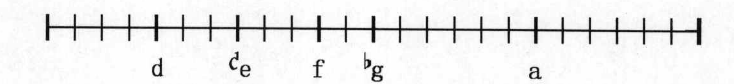


4. 打破四音列框架的特殊音列：

11）阿乌亚拉（'awjārā）是个很特殊的音列，同时含变化音级、四分音

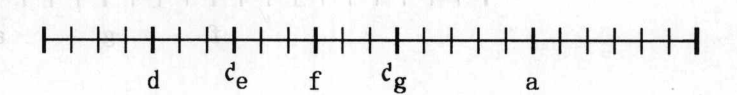


12）萨兹卡尔（sāzkār）特殊五声音阶，两段外框为变化四度的错位叠置，内含中立音；

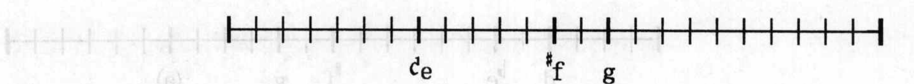


13）塞巴（sabā）特殊五声音阶，内含变化音和中立音；

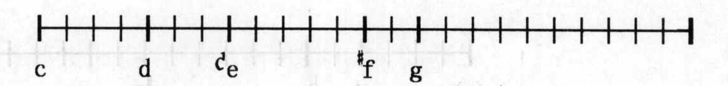
14）拉克卜（rakb）特殊五声音阶，内含中立音；



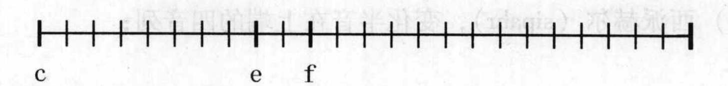
15）穆斯泰阿尔（musta’ār）特殊音列；



16）扎维尔（zāwil）五声音阶，后段为混合中立音和变化音的四音列；



17）拜海舒（baharshūrak）不完全四音列。



阿拉伯国家数目繁多的调式种类被上列 17 种“金斯”归类整合，就形成阿拉伯乐律学理论中的基本内容，在研究阿拉伯重要音乐现象“木卡姆”时，以二十四平均律为基础的“金斯”理论应该是有效的系统化分析工具。

第五章 欧洲乐律学发展历程

第一节 古希腊的“数理派”、“和谐派”及四音列

古代希腊人对律学的贡献是巨大的。早在公元前6世纪，哲学家兼数学家毕达哥拉斯（Pythagoras，公元前582～493年）就开始用独弦器（monochord 原义为“单弦”）作为校音工具，对律学进行研究。由于他主要是根据数学来研究当时音阶的定律法，并由此提出“五度相生法”，他和他的弟子们被称为“数理派”，五度相生律对当时的希腊音乐和以后的欧洲音乐产生了极为深远的影响。自他以后，又出现了一批主张以听觉定律的“和谐派”，并在公元前4世纪，古希腊人就发现长度比为5∶4的纯律大三度（阿希塔斯，Archytas，公元前400～365年），公元前3世纪又发现了长度比为6∶5的纯律小三度（埃拉托斯腾尼斯，Eratosthenes，公元前284～202年），而且在公元前1世纪，狄迪莫斯（Didymos，公元前63～公元10年）又发现了小全音与大全音之差，故被称为“狄氏音差”。这个音差是纯律与五度相生律两种律制相似音程之间的差，长度比为81∶80，音程值≈0.11全音，现在称为“普通音差”（common comma）或“协同音音差”。

虽然古希腊人公元前就发现了纯律音阶，但作为律制，在当时并没有变成主导制度。由于当时的希腊音乐主要是声乐歌唱，这种旋律化的音乐实践以五度相生律为主。那时，四音列（tetrachord 原义为“四弦”）有极重要的作用，理论上，认为四音列是构成调式的基础，各种四音列，两端框架总是纯四度，内部音程结构作各种变化，涉及不同律制。从“tetrachord”这个词的原义“四弦”可以看出，理论如此，演奏实践也如此。事实上，更应该说是由于里拉琴（lyra，古希腊多弦竖琴，抱持演奏。见图32）的相邻四条弦，两端两弦定为纯四度，其间两弦高度可变，构成各种四音列并形成理论体系。里拉琴上一系列空弦音准的确定，以独弦器为校音工具。



图32

希腊人在用语言描述弦长与音高之间的关系时，喜欢表达为“一条弦比另一条长……分之一”，如纯五度“hemiolios”，意为一根弦比另一根弦长一半而产生，即$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；纯八度“diplasios”则表示一条弦比另一条长一倍。这种表述还可以表达重量比例（weight ratio）与音高之间的关系。据说，毕达哥拉斯曾提到音高随直接拉力而变化，其中的规律是在弦垂下来的一端系上重物，12磅∶8磅=3∶2可以产生纯五度音

程。重量比值结果与长度比相同，但数值单位不同（图33 毕达哥拉斯的音律实验，图中多弦器的一端系有重物）。

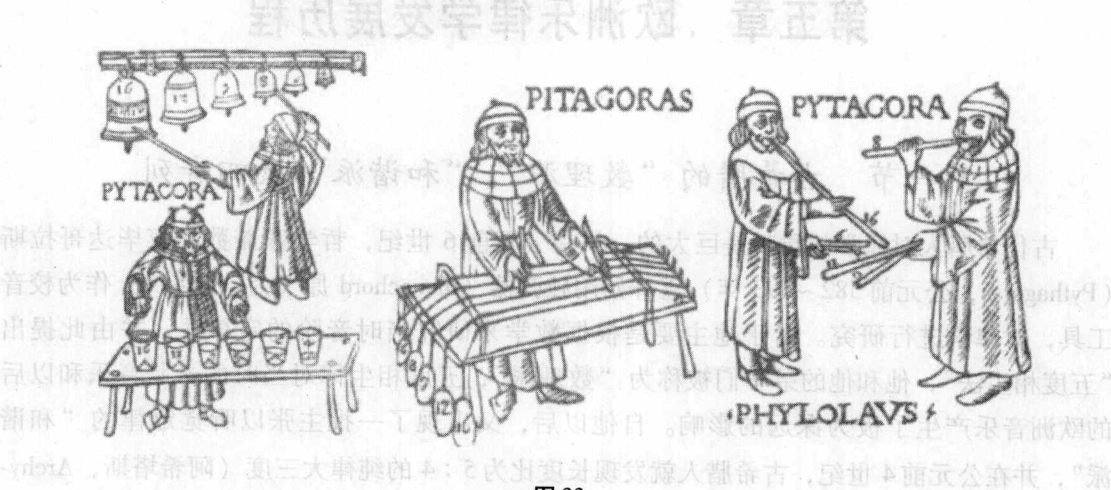


图33

这两种方法都是可试验的，似乎与里拉琴和弓形竖琴的音乐实践相关：重量比的表述可以说明里拉琴同弦长不同张力的情况；长度比可以表明弓形竖琴的情况。那时已经有纯八度、纯五度、纯四度、纯律大三度和大全音的专门术语。①

四音列的类型，先后出现过三种。

一、"自然四音列"（Diatonic tetrachord）

1．最初依照毕达哥拉斯律制，在纯四度框架内设两个大全音和一个林玛半音（五度相生小半音），三个间距的排列有三种可能的规格：a. 全、全、半；b. 全、半、全；c. 半、全、全。这三种自然四音列是构成古希腊三种主要调式（多利亚型调式、弗里吉亚型调式、吕底亚型调式）的基础。

这三种四音列的音律规定是这样的：

a. 全、全、半：

独弦器相对弦长 $1 : \frac{8}{9} : \frac{64}{81} : \frac{3}{4}$

间距音程系数 $| \frac{9}{8} | \frac{9}{8} | \frac{256}{243} |$

b. 全、半、全：

独弦器相对弦长 $1 : \frac{8}{9} : \frac{27}{32} : \frac{3}{4}$

间距音程系数 $| \frac{9}{8} | \frac{256}{243} | \frac{9}{8} |$

c. 半、全、全：

① 详见表101。

独弦器相对弦长 1 : $\frac{243}{256}$: $\frac{27}{32}$: $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{256}{243}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{9}{8}$ |

2. 在毕达哥拉斯之后，公元前4世纪至公元2世纪，希腊出现了一批主张凭听觉来定音律音准的“和谐派”音乐家。渐渐地，在音乐构成中具有极重要作用的自然四音列，由于和谐派的主张而发生了内部音程结构的各种变化，涉及不同律制，分化成多种四音列，使调式色彩更加丰富。或许正是音律给调式情感注入了丰富的变化性，才会激发出柏拉图和亚利斯多德从音乐哲学方面对于调式意义产生了那么丰富细腻的理解和阐释。

按照和谐派的数理界定，纯四度音程被划分为大全音（$\frac{9}{8}$）、小全音（$\frac{10}{9}$）与自然半音（$\frac{16}{15}$）三种间距。如此，以往由毕达哥拉斯门徒“数理派”制订的三种规格，每种都分化为两种可能性。用独弦器上的相对弦长来表述，能明确区分。

a.）“全、全、半”分化为：

a1）大全音靠下者[①]

独弦器相对弦长 1 : $\frac{8}{9}$: $\frac{4}{5}$: $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{10}{9}$ | $\frac{16}{15}$ |

相当于Ⅱ级具有属功能的大调音阶前半截（参见表14 自然大调音阶）；

a2）小全音靠下者

独弦器相对弦长 1 : $\frac{9}{10}$: $\frac{4}{5}$: $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{10}{9}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{16}{15}$ |

相当于Ⅱ级具有下属功能的大调音阶后半截（参见表14 自然大调音阶）；

b.）“全、半、全”分化为：

b1）大全音靠下者

独弦器相对弦长 1 : $\frac{8}{9}$: $\frac{5}{6}$: $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{9}{8}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{10}{9}$ |

相当于自然小调音阶前半截（参见表15 自然小调音阶）；

b2）小全音靠下者

独弦器相对弦长 1 : $\frac{9}{10}$: $\frac{27}{32}$: $\frac{3}{4}$

间距音程系数 | $\frac{10}{9}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ |

相当于印度Sa音阶前半截（参见表74 印度萨音阶）；

c.）“半、全、全”分化为：

c1）大全音靠下者

---

① 托勒密四音列的规范。

独弦器相对弦长　1　：　$\frac{15}{16}$　：　$\frac{5}{6}$　：　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　|　$\frac{16}{15}$　|　$\frac{9}{8}$　|　$\frac{10}{9}$　|

主音上三度音具有小调秉性的主功能；

c2）小全音靠下者

独弦器相对弦长　1　：　$\frac{15}{16}$　：　$\frac{27}{32}$　：　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　|　$\frac{16}{15}$　|　$\frac{10}{9}$　|　$\frac{9}{8}$　|

主音上三度音具有三重下属功能（参见表 74 印度萨音阶前半截降二级后所得）。

3. 这三种自然四音列的不同组合，可以形成不同的古希腊七声调式，每个调式由两个相同四音列构成。按照“数理派”和“和谐派”的不同规定，每个调式都可能有三种不同的音律规范。

（1）米克索吕第亚调式（mixolydian）①：

例 35



这是两个第三种——半、全、全式四音列在主音上向上叠加构成；

表 89　（表中并列毕氏规定及和谐派的两种规定，下同。）

	现代音名	e	f	g	a	♭b	c¹	d¹	e¹
毕氏c式	相对音高（全音数）	0	0.45	1.47	2.49	2.94	3.96	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{729}{1024}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
和谐派cⅠ	相对音高（全音数）	0	0.56	1.58	2.49	3.05	4.07	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$
和谐派cⅡ	相对音高（全音数）	0	0.56	1.47	2.49	3.05	3.96	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$

① 这七个调式音阶取自《新格罗夫音乐与音乐家辞典》中 C. 帕利斯卡撰写的条目《理论与理论家》(1980)，原条目中音阶由高向低排列，此处皆改为由低向高排列。另外，“mixolydian”来自古代希腊语，不宜翻译为拉丁语和英语的“mix”，故此处直译读音。

（2）吕第亚调式（lydian）：

例 36



这是由两个第一种——全、全、半式四音列相距大全音连接构成；

表 90

	现代音名	e	$^\sharp f$	$^\sharp g$	a	b	$^\sharp c^1$	$^\sharp d^1$	e^1
毕氏a式	相对音高（全音数）	0	1.02	2.04	2.49	3.51	4.53	5.55	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
和谐派aⅠ①	相对音高（全音数）	0	1.02	1.93	2.49	3.51	4.53	5.44	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$
和谐派aⅡ	相对音高（全音数）	0	0.91	1.93	2.49	3.51	4.42	5.44	6
	相对波长	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

（3）弗里吉亚调式（phrygian）：

例 37



这是由两个第二种——全、半、全式四音列相距大全音连接构成；

① 以托勒密四音列建立起来的调式结构，但与托勒密所规定的吕第亚调式略有不同，按照托勒密的规定，六级音应为纯律大六度$\frac{3}{5}$。

表 91

	现代音名	e	$^{\sharp}f$	g	a	b	$^{\sharp}c^{1}$	d^{1}	e^{1}
毕氏b式	相对音高（全音数）	0	1.02	1.47	2.49	3.51	4.53	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$
和谐派b Ⅰ	相对音高（全音数）	0	1.02	1.58	2.49	3.51	4.53	5.09	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$
和谐派b Ⅱ	相对音高（全音数）	0	0.91	1.58	2.49	3.51	4.42	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{9}{10}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{10}{9}$	$\frac{27}{25}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$

（4）多里亚调式（dorian）：

例 38



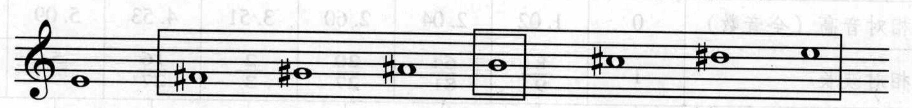
这是由两个第三种——半、全、全式四音列相距大全音连接构成；

表 92

	现代音名	e	f	g	a	b	c^{1}	d^{1}	e^{1}
毕氏c式	相对音高（全音数）	0	0.45	1.47	2.49	3.51	3.96	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{243}{256}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
和谐派c Ⅰ	相对音高（全音数）	0	0.56	1.58	2.49	3.51	4.07	5.09	6
	相对波长	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$
和谐派c Ⅱ	相对音高（全音数）	0	0.56	1.47	2.49	3.51	4.07	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$

（5）下吕第亚调式（hylydian）：

例 39



这是由两个第一种——全、全、半式四音列从高八度主音向下叠加构成；

表 93

	现代音名	e	$^{\sharp}f$	$^{\sharp}g$	$^{\sharp}a$	b	$^{\sharp}c^{1}$	$^{\sharp}d^{1}$	e^{1}
毕氏a式	相对音高（全音数）	0	1.02	2.04	3.06	3.51	4.53	5.55	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$
和谐派aⅠ	相对音高（全音数）	0	1.02	2.04	2.95	3.51	4.53	5.44	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$
和谐派aⅡ	相对音高（全音数）	0	1.02	1.93	2.95	3.51	4.42	5.44	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{32}{45}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$

（6）下弗里吉亚调式（hyphrygian）：

例 40



这是由两个第二种——全、半、全式四音列从高八度主音向下叠加构成；

表 94

	现代音名	e	$^{\sharp}f$	$^{\sharp}g$	a	b	$^{\sharp}c^{1}$	d^{1}	e^{1}
毕氏b式	相对音高（全音数）	0	1.02	2.04	2.49	3.51	4.53	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$

（续表）

	现代音名	e	#f	#g	a	b	#c¹	d¹	e¹
和谐派b Ⅰ	相对音高（全音数）	0	1.02	2.04	2.60	3.51	4.53	5.09	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$
和谐派b Ⅱ	相对音高（全音数）	0	1.02	1.93	2.49	3.51	4.42	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$

（7）下多里亚调式（hydorian）：

例41



这是由两个第三种——半、全、全式四音列从高八度主音向下叠加构成；

表93

	现代音名	e	#f	g	a	b	c¹	d¹	e¹
毕氏c式	相对音高（全音数）	0	1.02	1.47	2.49	3.51	3.96	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{27}{32}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{81}{128}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$
和谐派c Ⅰ	相对音高（全音数）	0	1.02	1.58	2.60	3.51	4.07	5.09	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{20}{27}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$
和谐派c Ⅱ	相对音高（全音数）	0	1.02	1.58	2.49	3.51	4.07	4.98	6
	相对波长	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{1}{2}$
	相邻音程系数		$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$

这个排比显示，后三个附加前缀词“下”的调与同名本调之间是由同样的四音列构成，只是组合方式有“叠加”和“连接”不同，调名含“下”者与同名本调为下属关系调。“下吕第亚调式”中有五度律纯律两种增四度；“下弗里吉亚调式”和“下多里亚调式”中都有纯律宽四度形成。

二、“变化四音列”（色彩性 Chromatic tetrachord）

原义为“色彩艳丽的”、“闪烁的”。其结构为“半音、$1\frac{1}{2}$音、半音”，这种结构若用毕达哥拉斯学说解释，关系极为复杂，难与感觉相通，只能采用“和谐派”的数理界定。

独弦器相对弦长　　1　：　$\frac{15}{16}$　：　$\frac{4}{5}$　：　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　　　$\frac{16}{15}$　　$\frac{75}{64}$　　$\frac{16}{15}$

相当于近代和声大小调音阶的后半截（参见表16和声小调音阶），中间这个增二度是非常特别的，也是茨岗（吉卜赛）音阶的特征部件。

表96

借用记谱				
相对音高全音数	0	0.56	1.93	2.49
相对波长	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$
相邻两音的音程系数	$\frac{16}{15}$	$\frac{75}{64}$	$\frac{16}{15}$	

三、四分音四音列（Enharmonic tetrachord）

汉语译做“四分音”的词，也可译做“准和谐”、“等音的”，有近似和谐之意，此处之所以译做“四分音”，是鉴于所插入的特性音律与两邻音律各相距约$\frac{1}{4}$全音。四分音是毕达哥拉斯以后才提出来的，这个音的介入，使原本在纯四度框架内划分成纯律大三度与自然半音两间距的基础上，自然半音被再次分解成两份，其间插入的特性音律处于中立位置。参照当代的律学研究成果来推测，古希腊的四分音音列，可能有这样两种样式：

（1）四分音靠下者

独弦器相对弦长　　1　：　$\frac{31}{32}$　：　$\frac{15}{16}$　：　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　　　$\frac{32}{31}$　　$\frac{31}{30}$　　$\frac{5}{4}$

表97

借用记谱				
相对音高全音数	0	0.27	0.56	2.49
相对波长	1	$\frac{31}{32}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{3}{4}$
相邻两音的音程系数	$\frac{32}{31}$	$\frac{31}{30}$	$\frac{5}{4}$	

（2）四分音靠上者

独弦器相对弦长　1　:　$\frac{4}{5}$　:　$\frac{31}{40}$　:　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　$\frac{5}{4}$　$\frac{32}{31}$　$\frac{31}{30}$

表98

借用记谱				
相对音高全音数	0	1.93	2.21	2.49
相对波长	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{31}{40}$	$\frac{3}{4}$
相邻两音的音程系数	$\frac{5}{4}$	$\frac{32}{31}$	$\frac{31}{30}$	

四、阿希塔斯方案

发现纯律大三度的阿希塔斯对这三种四音列都曾提出过自己的解释方案：

阿氏的“自然四音列”：纯四度框架被“大全音”、“特大全音”分化，余下那部分被后人称为“三分音”，成为如下结构：

相对音高　0　1.02　2.18　2.49

独弦器相对弦长　1　:　$\frac{8}{9}$　:　$\frac{7}{9}$　:　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　|　$\frac{9}{8}$　|　$\frac{8}{7}$　|　$\frac{28}{27}$　|

音程系数为$\frac{28}{27}$的音程值只有0.31全音，阿希塔斯认为这仍然是自然音程。这样一个数列用最简整数比表示是：36：32：28：27，符合他所追求的音程具有简单整数比关系的原则。

变化四音列结构，纯四度框架两端为五度律小三度和“三分音”，成为如下结构：

相对音高　0　1.47　2.18　2.49

独弦器相对弦长　1　:　$\frac{27}{32}$　:　$\frac{7}{9}$　:　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　|　$\frac{32}{27}$　|　$\frac{243}{224}$　|　$\frac{28}{27}$　|

“四分音四音列”结构为，四分音靠上：

相对音高　0　1.93　2.18　2.49

独弦器相对弦长　1　:　$\frac{4}{5}$　:　$\frac{7}{9}$　:　$\frac{3}{4}$

间距音程系数　|　$\frac{5}{4}$　|　$\frac{36}{35}$　|　$\frac{28}{27}$　|

后两种四音列的数列用最简整数比表示分别是：

“变化四音列”为　288：243：224：216

“四分音四音列”为180：144：140：135

很显然，这两组比例关系变得复杂了，不符合他所追求的音程具有简单整数比关系的原则，这正是被托勒密所批评。但研究者认为，很多证据表明，阿希塔斯是根据他那个时代的音乐实践总结出这样的四音列结构，① 托勒密在批评阿希塔斯时忽略了500年前的音乐实践。这三种四音列都可以构成含中立音的调式音阶，虽然在今天的音乐理论知识中，古希腊各种调式结构中没有涉及中立音，但整个环地中海各国民族音乐中的中立音现象却是比较普遍的。

在公元前约千年内，人类的几大文明在这个文明的原始积累期，以各自的方式达到了对音乐数理规律的高度理解以及对八度内音高细微变化的了解与控制，“自然四音列”和“变化四音列”的和谐派数理界定为后来西方大小调理论准备好了律学理论基础，只等着后代子孙们来继承这份珍贵遗产。“四分音四音列”则对西亚、中亚、印度次大陆的乐调理论提供了理论基石。

第二节　欧洲人的纯律探索及中庸全音调律法

9世纪以前，在欧洲一直采用单音音乐，所以，五度相生律不会受到什么挑战。9世纪以后，多声部音乐开始萌芽，初始，仅用八度、纯四度和纯五度音程的同时结合，协和性方面没有问题，但至14世纪，多声部复调音乐已被确立，三度和六度音程的结合开始普遍被使用，五度相生律三度、六度不协和问题随之变得日渐显著，因而促使纯律理论重被提起，英国修士W·奥丁顿（Walter de Odington）于13世纪下叶提出了含有纯律三度的音列。同代人德国科隆的音乐理论家弗兰科（Franko von Köln）把纯律大小三度作为协和音程。14世纪法国作曲家兼理论家德维特里（Philippe de Vitry，1291～1361年）与音乐理论家让·德穆里斯（Johannes de Muris，1325～?）分别提出把纯律小六度（8：5）和纯律大六度（5：3）作为协和音程。自这些主张后，不断有人探索古代希腊的音律理论，直到15世纪后期，由西班牙音乐理论家拉莫斯（Bartolomé Ramos［Ramis］de Pareja，1440～1500年）第一个打破了毕达哥拉斯和谐理论的教条，在1482年发表的论文Musica practica中提出了一种十二半音音阶，其中包含了6个以质数5为界定的比例。这在欧洲音乐史上是第一次。② 随着主调音乐开始发生，多种多样的中世纪调式渐渐变化，至17世纪初基本上转化归并为大小调系统，纯律是大小调系统的理论基础。

---

① 见斯坦福哲学百科全书电子版“Archytas”条目，Carl Huffman。http：//plato. stanford. edu/entries/archytas/（2003年6月～　）

② Cris ForsterI *Musical Mathematics*（《音乐数学》）网上手稿，第10章“西方音律理论与实践”/第四节“调律”之37“拉莫斯”，见克里塞利斯基金会网站 http：//www. chrysalis－foundation. org/Al－Din_&_ Ramis. htm（2000～　）。又见 *Dictionary of the History of Ideas*（《思想史辞典》）第3卷 CLAUDE V. PALISCA 撰写的 *MUSIC AND SCIENCE*（音乐与科学），第261－264：261页。Charles Scribner's Sons，New York，in 1973－74. 此处使用该版本的电子版，自 The Electronic Text Centerat the University of Virginia Library。

一、拉莫斯的纯律理论

根据拉莫斯在文中所给定的条件，我们可以把他的材料解析如下：

1. 音系网的雏形

他在这篇论文中，确定协和三度（大小三度及转位）为前提，这样的材料可以构成如下的音系图：

$D\left(\frac{3}{4}\right)$ — $[A]\,(1)$ — $E\left(\frac{2}{3}\right)$ — $B\left(\frac{8}{9}\right)$　$^{\sharp}F\left(\frac{16}{27}\right)$ — $^{\sharp}C\left(\frac{64}{81}\right)$

$^{\flat}A\left(\frac{135}{256}\right)$ — $^{\flat}E\left(\frac{45}{64}\right)$ — $^{\flat}B\left(\frac{15}{16}\right)$ — $F\left(\frac{5}{8}\right)$ — $C\left(\frac{5}{6}\right)$ — $G\left(\frac{5}{9}\right)$

图34

且看这个包含三个质因数的音系网片断，上、下两横轴以质数 3 为界定，A 音以右为三分相生，以左为三倍相生；左下斜线相连的两音之间为纯律大三度关系，音程系数为$\frac{5}{4}$，右下斜线相连的两音之间为纯律大六度关系，音程系数为$\frac{5}{3}$。这个音系的数理规定性是以三分三倍和五倍复合构成的。这事实上已经形成以质数 2、3、5 为界定的纯律音系网的雏形。以我们现在所拥有的和声学知识，可以看到每个正三角形形成大三和弦，每个倒三角形形成小三和弦。

$$\begin{matrix} {}^{\flat}b & & d & & f \\ \left(\frac{15}{16}\right. & : & \frac{3}{4} & : & \left.\frac{5}{8}\right) \end{matrix}$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}\right)\times 3\times 5$$

括弧中的$\frac{1}{4}$：$\frac{1}{5}$：$\frac{1}{6}$正是大三和弦的模型；

$$\begin{matrix} d & & f & & a \\ \left(\frac{3}{4}\right. & : & \frac{5}{8} & : & \left.\frac{1}{2}\right) \end{matrix}$$

$$=(6\ :\ 5\ :\ 4)\ \times 2^{-3}$$

括弧中的 6 : 5 : 4 正是小三和弦的模型。

横轴右段衍生出两个升半音，确定了升半音系统的属功能性质；横轴左段衍生出两个降半音，确定了降半音系统的下属功能性质。

所以说，这两行五度链的叠加所构成的音系网片断，显示出后世才有的大小三和弦的胞核，并给我们以纯四、五度功能关系的启示。

2. 拉莫斯在一弦器上论证的纯律十二半音音阶

拉莫斯是欧洲第一个提出十二半音音阶的人，关于这一点，以前我们并没有太多的了

解。他详细描述了弦长划分的步骤，解析如下：

第 1 步：在一个有点凹面的木板上张一根弦，设全弦为基音（A）；

第 2 步：将全弦二分，得高八度音（h、A^1），有效弦长 $=1\div\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$；

第 3 步：将中点至尾端这段距离之间二分，得纯四度音（d、D），有效弦长 $=\left(\frac{1}{2}+1\right)\div 2=\frac{3}{4}$；

第 4 步：将纯四度到高八度之间这段距离之间二分，得纯律小六度（f、F），有效弦长 $=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\div 2=\frac{5}{8}$；

第 5 步：将半弦再次二分，得复高八度（p、A^2），有效弦长 $=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$；

第 6 步：将半弦与$\frac{1}{4}$弦之间这段距离之间二分，得高八度的纯四度音（l、D^1），有效弦长 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\div 2=\frac{3}{8}$；

第 7 步：在 D^1 至 A^2 这两点距离之间二分，得高八度纯律小六度（n、F^1），有效弦长 $=\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\right)\div 2=\frac{5}{16}$；

第 8 步：在纯律小六度与高八度纯律小六度这两点距离之间二分，得高八度纯律小二度（i、$^\flat B^1$），有效弦长 $=\left(\frac{5}{8}+\frac{5}{16}\right)\div 2=\frac{15}{32}$；

第 9 步：将全弦三分，取$\frac{2}{3}$点为纯五度，取$\frac{1}{3}$点为高八度纯五度（e、E；o、E^1）；

第 10 步：将纯五度与端点这段距离再次三分，取三分之二处得高八度五度相生的大二度（H、B^1），有效弦长 $=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$；再将$\frac{4}{9}$这段弦长加倍，得$\frac{4}{9}\times 2=\frac{8}{9}$，即大全音（$b$、B）；

第 11 步：将半弦与$\frac{1}{3}$弦这两点距离二分，得高八度纯律小三度（k、C^1）有效弦长 $=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\div 2=\frac{5}{12}$；将这段有效弦长加长一倍，即$\frac{5}{12}\times 2=\frac{5}{6}$，得纯律小三度（$c$）；

第 12 步：在 e 与 H 两点之间二分，得纯律小七度（g、G），有效弦长为 $\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}\right)\div 2=\frac{5}{9}$；将这段有效弦长二分，得高八度小七度$\frac{5}{18}$（$o$、$G^1$）；

以下几步是求两个降半音及高八度，两个升半音及高八度。

第 1 步：将$^\flat B^1$ 点至端点这段弦长加倍，即$\frac{15}{32}\times 2=\frac{15}{16}$，即自然半音（$^\flat$B）；

第 2 步：将$^\flat$B、$^\flat B^1$ 这两点之间的距离二分，得纯律减五度$^\flat$E，有效弦长 $=\left(\frac{15}{16}+\frac{15}{32}\right)\div 2=\frac{45}{64}$，高八度减五度有效弦长 $=\frac{45}{64}\times\frac{1}{2}=\frac{45}{128}$；

第 3 步：将$^\flat$E、$^\flat E^1$ 这两点之间的距离二分，得纯律减一度的高八度音$^\flat A^1$，有效弦长 $=\left(\frac{45}{64}+\frac{45}{128}\right)\div 2=\frac{135}{256}$，减一度$^\flat$A 有效弦长 $=\frac{135}{256}\times 2=\frac{135}{128}$；

接下来，以五度相生求出两个升半音

第 4 步：将 B 点至端点这段距离三分，得高八度的五度相生大六度，有效弦长 $=\frac{8}{9}\div 3=\frac{8}{27}$（$^{\sharp}F^{1}$），$\frac{8}{27}\times 2=\frac{16}{27}$（$^{\sharp}F$）；

第 5 步：将$^{\sharp}F$ 音的有效弦长再三分，得高八度的五度相生小三度$^{\sharp}C^{1}$，$\frac{16}{27}\times\frac{2}{3}=\frac{32}{81}$，$\frac{32}{81}\times 2=\frac{64}{81}$。

3. 拉莫斯的十二半音音阶及八声音阶

根据以上各步骤获得的音，按音高顺序排列制成表格如下。

表 99

音名	a	$^{\flat}b$	b	c	$^{\sharp}c$	d	$^{\flat}e$	e	f	$^{\sharp}f$	g	$^{\flat}a$	a^{1}
相对弦长	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{45}{64}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{135}{256}$	$\frac{1}{2}$
相对音高(全音数)	0	0.56	1.02	1.58	2.04	2.49	3.05	3.51	4.07	4.53	5.09	5.54	6
相邻的音程系数	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{256}{243}$	$\frac{135}{128}$	
相邻音差	0.56	0.46	0.56	0.46	0.45	0.56	0.46	0.56	0.46	0.56	0.45	0.46	

从表 99 可以看出，这种半音音阶结构有三种半音，除了“林玛半音”、自然半音，还有一种纯律小半音，音程系数为$\frac{135}{128}$。

拉莫斯提出过一种纯律八声音阶，自然半音在主音和上主音之间。他还规定了其他各音级之间的音程系数，根据他的规定，可以设计表格如下：

表 100 拉莫斯的纯律八声音阶

校正值（全音数）		+.06	+.02	+.08	−.01	+.01	+.07	+.09	
音名	A	$^{\flat}B$	B	c	d	e	f	g	a
相对弦长	1	$\frac{15}{16}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{2}$
相对音高	0	0.56	1.02	1.58	2.49	3.51	4.07	5.09	6
相邻两音音程系数	$\frac{16}{15}$	$\frac{135}{128}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	
相邻音程值	0.56	0.46	0.56	0.91	1.02	0.56	1.02	0.91	

从上表中可以看出，去掉主音上方的自然半音，这就是一个自然小调音阶。

拉莫斯打破了毕达哥拉斯以来以质数 3 为生律因素的律制规定，以简单比例关系$\frac{4}{5}$取代了复杂的$\frac{64}{81}$、$\frac{5}{6}$取代了$\frac{27}{32}$、$\frac{3}{5}$取代了$\frac{16}{27}$、$\frac{5}{8}$（纯律小六度）取代了$\frac{81}{128}$。

他这种包括质数 5 建立起来的谐和音列，缘因于他自己对歌唱者的观察和切身体验，他注意到歌唱者的自然倾向，并声称“尽管它（指毕达哥拉斯律制）是有用并使人愉快的

理论，但对于歌手而言，却是极为困难的……”

拉莫斯在后人发现和谐数列早前约两百年就已经涉及了$\frac{1}{4}$：$\frac{1}{5}$：$\frac{1}{6}$和6：5：4这样的数列，显然他的发现不是得益于自然科学新发现。这个发现的实质是一种人文的办法，用一个简单的材料经过若干次模进移位，逻辑推衍，从而形成最早的十二半音音阶。歌唱之所以是人类才具有的才能，皆因为歌唱就是从感性的移位上升到理性的推衍。那么，拉莫斯把只有人所具有的这种才能上升到理论层面，他的学术继承来自于哪里呢？

他生长在西班牙的一个小镇稗依萨（Baéza），这里属于西哈里发（711～1492年）统治了800年之久的安达卢西亚（Andalusia）地区，在这800年间，阿拉伯科学家、艺术家和学者们在这里创造了辉煌的文化。阿尔·法拉比、伊本·西纳、萨菲－阿尔丁等伟大的学者已经将长度比为$\frac{5}{4}$、$\frac{6}{5}$这样的音程归类为完全协和音程。拉莫斯在这里度过了他的前半生，在他32岁后移居意大利之前，他有条件在西班牙本土学习到了阿拉伯人以量音理论建立起来的多维音律观念。

二、扎里诺的纯律理论

尽管拉莫斯将以质数5为界定的比例规范组织成为十二半音音列，但他并没有发展出一套和谐理论。而在他发表了一弦器量音结果76年以后，意大利理论家扎利诺（Giosephe Zarlino，1517～1590年）发表了《和声规范》（Istitutioni harmoniche，1558年首次发表），在这部著作中他提出用“6数列”（numero Senario，‘composed of six in a group’）解释和谐音程的所有来源，并清楚阐述弦上的和谐划分是和谐的本质，可以产生出作曲家所希望的“完全协和音程”。在生命的晚年，他更具体地阐述了对纯五度3：2的算术划分以及和谐划分，分别可以获得我们今天所说的“小三和弦”与“大三和弦”，并移位展开而形成“小调音阶”和“大调音阶”。他也因此成为欧洲第一位用数学定义乐学理论的音乐理论家。

至扎里诺在建立大小三和弦概念的基础上提出了我们今天所知道的纯律大小调音阶，可以说纯律理论达到完全成熟。从乐律学史的视角回顾，拉莫斯从量音术的实践中遭遇到质数5，从而打破了自毕达哥拉斯以来以质数3为樊篱的理论传统。扎里诺与拉莫斯不同的是，拉莫斯用实验的办法找到了质数5的生律意义，而他是从数论的角度找到了质数5而挑战毕达哥拉斯以来的理论传统。从发展的规律而言，首先应该观察一下他的认识来源是什么。

1. 古希腊音程术语中的律学信息

古希腊在表达音程关系时，总是用一些口头术语来描述数学比率，这从术语的构词可以看出来。大概是因为语言学方面的复杂因素，他们不用比值小于1的分数定义音程，而是用大于1的假分数。例如，“纯八度”的比例术语是“diplasios”，意思是“两倍”。“di”意思是“2”，“plasma”意为“某种结构”，结合在一起就表明“某物的两倍”，也就是说，纯八度音程是由一根弦比另一根弦长一倍而产生，即$\frac{2}{1}$；同样，纯五度为“hemiolios”，

"hemi" 意为 "一半"，"olos" 意为 "全部"，合在一起就表明 "一个和半个"，也就是说，纯五度音程是由一根弦比另一根弦长一半而产生，即 $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；纯四度的比例术语是 "epitritos"，"epi" 这个前缀是一个精确的数学用语，意即加法，"tritos" 意为 "三分"，"epitritos" 意为 "一加三分之一"，也就是说，纯四度音程是由一根弦比另一根弦长三分之一而产生，即 $1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$；大全音的比例术语是 "epogdoos"，意为 "一加八分之一"，即 $1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}$。

与之相反的是在各种音程名称前都加了另一前缀 "hyp" 或 "hyph"，意思是一个数的倒数，那么，上述各种音程就都是以比值小于 1 的真分数来表达，列表如下：

表 101

音程值	比例术语	比值	倒数的表达	比值
纯八度	diplasios	$\frac{2}{1}$	hypodiplasios	$\frac{1}{2}$
纯五度	diapente、hemiolios	$\frac{3}{2}$	hyphhemiolios	$\frac{2}{3}$
纯四度	epitritos	$\frac{4}{3}$	hypepitritos	$\frac{3}{4}$
纯律大三度	epitetartos	$\frac{5}{4}$	hypepitetartos	$\frac{4}{5}$
大全音	epogdoos	$\frac{9}{8}$	hypepogdoos	$\frac{8}{9}$

在中世纪和文艺复兴时期，欧洲的理论家用拉丁数学术语取代古希腊术语，只是保留了纯五度 "diapente"。虽然用拉丁语替换了希腊语，但构词法是一样的，列表如下：

表 102①

拉丁术语	构词	古代长度比
sesqui – altera	1 + 1/2	3 : 2
sesqui – tertia	1 + 1/3	4 : 3
sesqui – quarta	1 + 1/4	5 : 4
sesqui – quinta	1 + 1/5	6 : 5
sesqui – sexta	1 + 1/6	7 : 6
sesqui – septima	1 + 1/7	8 : 7
sesqui – octava	1 + 1/8	9 : 8
sesqui – nona	1 + 1/9	10 : 9
sesqui – decima	1 + 1/10	11 : 10
sesqui – decima – quinta	1 + 1/15	16 : 15

① 引自《音乐数学》第 10 章第 42 节表 25。

2. 托勒密音阶

早在公元1世纪，古希腊天文学家、数学家、音乐理论家托勒密（Claudius Ptolemy，公元100~165年）就已经提出一种紧张全音的四音列，并用这样的四音列来规范“吕第亚调式”和“多利亚调式”，所形成的调式音阶，就已经形成了今天我们所说的纯律大、小调音阶。

托勒密四音列的结构为“全、全、半”，具体为大全音靠下。①

吕第亚调式音阶：1 $\frac{8}{9}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{8}{15}$ $\frac{1}{2}$

扎里诺非常推崇托勒密四音列的结构，并极力提倡在音乐实践中运用托勒密四音列。

3. 阿拉伯学者在建立纯律方面所达到的先期成果

此前，波斯理论家伊本·西纳已经发现并描述了在一根弦上做算术划分及和谐划分，可以获得对纯八度和纯四、五度的划分。

例42



他先得到第一种算术等差连比划分，形成下方纯四度、上方纯五度。然后规定在八度内两音程的顺序倒置，仍然可以得到纯五度和纯四度，但位置已经改变。第二个连比的本质规范是：

$$6 : 4 : 3$$

$$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4}\right)\times 2^{-2}$$

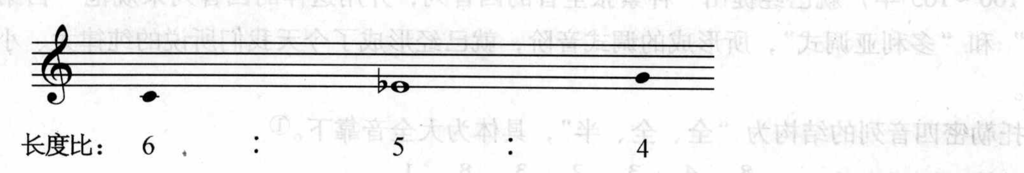
伊本·西纳很清楚对纯四、五度做和谐中项的划分比做算术中项划分要困难，所以他提供了一个简单的解决方法：

如果在3∶2找不到一个整数来进行和谐中项划分，就用下方两个大数构成的长度比做算术划分。根据这个方法，可知：即在6∶4之间添加一个中项数字为5，就得到6∶5∶4。这个连比关系中所形成的三种音程，正好可以表述为以相邻数之比所构成的音程。由低到高，下方是纯律小三度，长度比6∶5；上方是纯律大三度，长度比5∶4；外框为纯五度，长度比3∶2。后来萨菲丁用一个简单的方法解决了定义问题：即，纯五度 $=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$；纯律大三度 $=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$；纯律小三度 $=1+\frac{1}{5}=\frac{6}{5}$。

① 参见第161页a1自然四音列。

萨菲丁是第一个对纯五度的算术划分进行理论表述的人：

例 43



4. 德国数学家的和谐划分理论

米夏尔·施迪弗（Michael Stifel，公元 1487～1567 年）是第一个从算术级数中衍生出超过三项建立起的和谐级数。他先对两个八度的长度比进行和谐划分，在 4：1 中增添两个和谐中间项，构成 24：12：8：6，其本质可以分解为 $(1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4})\times\frac{1}{3}\times2^{-3}$。他得到一个定律，即几项算术级数可以产生几项和谐级数。他又对两个八度又纯五度音程，长度比为 6：1 的弦长做出算术中间项的划分（*Arithmetica integra*，1544 年发表）。施迪弗是个几何学家，他通过几何学观察，找到了算术级数与和谐序数的倒映关系。首先，在 6－1 之间增添了 4 个中间项，得到 6、**5**、**4**、**3**、**2**、1 这样的算术级数，然后通过以下步骤转换成为和谐级数：先将各项连乘，所得积数 $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$，再以各项 ×12 作为除数，即 $720\div(6\times12)=10$、$720\div(5\times12)=12$……依次得 10、12、15、20、30、60 和谐级数。这个数列的本质可以分解为：

$$60:30:20:15:12:10=(1:\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6})\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}\times2^{-2}$$

这样的和谐级数早在法国人约瑟夫·索维尔（Joseph Sauveur，1653～1716 年）发现弦振动的谐音列前 150 年就已经找到，我们可以推断，施迪弗完全理解在古代长度比 6：1 之间增加 4 个和谐中间项 10、**12**、**15**、**20**、**30**、60 所具有的数学意义和音乐意义。

5. 扎里诺对前人律学思想的整合

在毕达哥拉斯律制中，将一根弦划分为四等分，可以产生纯五度（$\frac{2}{3}$）、纯四度（$\frac{3}{4}$）、纯八度（$\frac{1}{2}$）以及双重八度（$\frac{1}{4}$）和纯五度的高八度（$\frac{1}{3}$），扎里诺不满足于这"4 数列"只能产生五种协和音程的局限，因而提出了"6 数列"。"6 数列"的性质是迷人的，$1+2+3=1\times2\times3=6$，因此被认为是完美的，所以也称"完美数列"。扎里诺认为完美的"6 数列"能够解释所有协和与不完全协和音程，他是这样解释他的 6 数列：

1）首先对 3：2 做算术划分，这是两个相邻的质数，对这两个数各乘以 2，获得 6 和 4，然后两数相加等于 10，再将其划分为两个相同的部分，各为 5。5 这个数不仅是商，当被插入到这个连比式中，它与前后两数有相同差数，形成等差数列；与前与后还构成两个不同的比值关系，两个大数之比，即 6：5 得小的比值；相反，两个小数之比，即 5：4 得

大的比值。这个结果符合小的律数（在弦上反映为相对短的弦长）对应高音、大的律数（在弦上反映为相对长的弦长）对应低音这种自然事实，用算式表述：

(3：2) ×2 =6：4

(6 +4) ÷2 =5　　插入纯五度作为中项

6：5：4　　即小三和弦。

2）和谐划分：以6：4为模型，用第3个数5为乘数，得（6：4） ×5 =30：20

再6 ×4 =24，并将此项插入纯五度，可得整数连比30：24：20 =15：12：10

前两项为纯律大三度关系15：12 =5：4

后两项为纯律小三度关系12：10 =6：5

这个和谐级数构成的连比式，其本质分解如下：

15：12：10

$= (\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}) \times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times 2^{-2}$ 括弧中正是大三和弦的模型。

他进一步论证了大六和弦是由纯律大三度和纯四度两个音程构成：$\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$

用最简整数比表述为5：4：3

前两项为纯律大三度关系5：4

后两项为纯四度关系4：3

这个和谐级数构成的连比式，其本质分解如下：

5：4：3

$= (\frac{1}{12}:\frac{1}{15}:\frac{1}{20}) \times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times 2^{-2}$ 括弧中正是小三和弦第一转位的模型。

同样，他用此方法论证了小三和弦第二转位的构成：$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$

用最简整数比表述为8：6：5

前两项为纯四度关系8：6 =4：3

后两项为纯律小三度关系6：5

这个和谐级数构成的连比式，其本质分解如下：

8：6：5

$= (\frac{1}{15}:\frac{1}{20}:\frac{1}{24}) \times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times 2^{-3}$ 括弧中正是小四六和弦的模型。

这两个和弦是由两个含不同质数界定的音程组成，所以协和性略低。

在扎里诺的晚年，他对“五度”的和谐划分和算术划分进行整合考虑，通过对托勒密吕第亚调式的分析，为纯五度的两个外项给出180：120（ =3：2），然后得出中间各项整数为：

托勒密吕第亚调式前六项：1　$\frac{8}{9}$　$\frac{4}{5}$　$\frac{3}{4}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{3}{5}$

各项转化为整数连比式：(180：160：144：135：120：108) $\frac{1}{5}\times\frac{1}{9}\times 2^{-2}$

例 44



135 那数并不是严格的算术中项，而是从真正的算术中项 134（160 + 108 ÷ 2 = 134）调整而得到的（$180\times\frac{3}{4}=135$）。因为 134 涉及过于复杂的比例关系，不符合协和原理，扎里诺放弃了这个不合理的数。第二组算术数列的五度外项比例为$\frac{27}{40}$，与纯五度相差一个"普通音差"$\frac{2}{3}\div\frac{27}{40}=\frac{80}{81}$（即狄氏音差），扎里诺因此分析出了纯律狭五度是由"毕达哥拉斯小三度"和纯律大三度构成。

被称为"和声之父"的扎里诺通过律学手段，对和声产生的自然原理进行成功解释，即在一根弦上的和谐划分产生大三和弦（$\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$），等差划分产生小三和弦（6∶5∶4）①，得到比数愈简单，协和程度愈完满这一符合声学原理的结论。同时，他也运用数学手段论证了在纯五度框架内，大三度靠下，和声具有令人愉悦的功效；小三度靠下，和声具有令人忧伤的色彩。所以说，扎里诺不仅用 6 数列详细定义了和声原理，同时还能通过数理分析对相对应的情感性质进行论证。

就乐律学史的角度看，扎里诺的功绩在于，把弦长划分梳理成两个系统，并给予命名：

1）和谐划分 6 数列：1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$；

2）等差划分 6 数列：1、2、3、4、5、6。

这种提炼在东西方的乐律学世界中都是最早的。其实，在中国古琴十三徽上早已具备了发现和谐划分的条件，古琴第二、三、四、五、七徽早已得到六等分、五等分、四等分、三等分、二等分（见第 87 页表 42）。但遗憾的是，由于音乐实践中没有和声的要求，所以，自汉末以来，尽管早已有乐器的条件，却没能提炼出这样的和谐划分 6 数列。而这个 6 数列早于谐音列的发现，显示出了辩证的双向进展。不仅是指对大、小和弦有双向来源的解释，还包括对属方向和下属方向的理论认知。用这对等差划分、和谐划分倒映关系的 6

---

① 参见桑桐：和声学条目，《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》第 266 – 268：266 页。

数列作为解释和声的思想基础，为和声学二元论观点做好了充分准备。

扎里诺对西方音乐理论的贡献是巨大的，他的思想来源有三个方面：1）古希腊“和谐派”代表性人物托勒密四音列的数学原理；2）拉莫斯在一弦器上寻找纯八度内12半音的相对弦长；3）德国数学家米夏尔·施迪弗对长度比6：1进行算术划分及和谐划分。

扎里诺对上述诸位的学术成果有机继承并融合，建立了以“6数列”为基本原理的和声学理论，尽管他也热衷于为解决键盘乐器调律问题而探索“中庸全音律”，但在和声学理论的研究中，他一直坚持以有理数表述音与音之间自然关系的立场。400年后的西方音乐理论仍然立足于他的数列假设，仍然用这些有理数的比例关系来解释和声。

三、纯律在音乐实践中的问题

1. 在键盘乐器上的纯律运用

在文艺复兴的社会运动热潮中，乐器渐渐从为声乐和舞蹈伴奏的角色脱胎出来，获得了独立的地位。各种独奏、重奏、合奏的器乐曲成为音乐生活中的主要作品形式，各种键盘乐器，如管风琴（organ）、羽管键琴（harpsichord）、古钢琴（clavichord）是当时的主要乐器。纯律运用在带来音响上协和完美效果的同时，却也遇到另一个尴尬：如何保证每个音上可以建立协和的大小三度和大小六度？于是人们尝试设计八度内多律键盘。



图35

（1）意大利作曲家尼古拉（Nicola Vicentino，1511～1572年）于1555年曾设计了一个八度内35键的“特制羽管键琴”（Archicembalo），有两层键盘，每层分三排，如图35（复原件）。根据古希腊四分音概念，在纯律大半音中插入两个被划分的更小的微音，称为大小“第西斯”（diesis）。

分析如下：

现代音名：	E		（$^{\flat}$F）		（$^{\sharp}$E）		F
纯律大半音：	16			:			15
相对波长：	1						$\frac{15}{16}$
插入两个微音：	1	:	$\frac{125}{128}$	:	$\frac{24}{25}$	:	$\frac{15}{16}$
相邻音程系数：		$\frac{128}{125}$		$\frac{3125}{3072}$		$\frac{128}{125}$	
相邻音差：		0.205		0.148		0.205（全音）	

由于这新插入的两音，因而又派生出更小的半音。

相对四分音的校正值：　　　-.045　　　-.103　　　+.06

现 代 音 名：E　　　$^{\flat}$F　　　$^{\sharp}$E　　　F

插入两个微音：1　：　$\frac{125}{128}$　：　$\frac{24}{25}$　：　$\frac{15}{16}$

更小半音：$\frac{25}{24}$

更小半音：$\frac{25}{24}$

在其他各音程之间也都插入这样两个键，八度内就形成一列细密的35律。

（2）扎里诺也曾设计过应用纯律的16律键盘，但这个键盘在转调方面极受限制。半个世纪后，法国物理学家、音乐理论家梅尔桑（Marin Mersenne，1588～1648年）设计了一种八度内26律的键盘，并由荷兰音乐理论家班恩（Joan Albert Ban，1597～1644年）于1639年制成。班恩还制作了一个八度内18律的大键琴（图36）。图中键盘上的数字显示的正是纯律的数理关系：

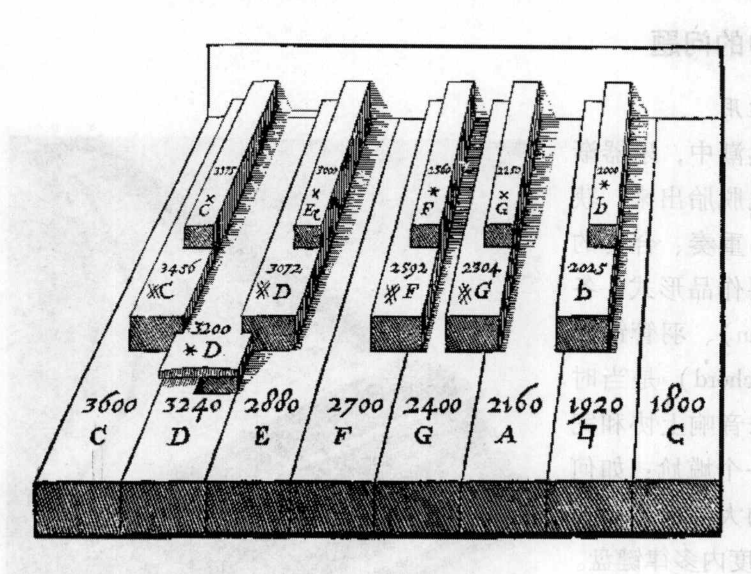


图36

建立整数连比式：3600：3240：2880：2700：2400：2160：1920：1800

化　　　　简：（60　：54　：48　：45　：40　：36　：32　：30）$\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}\times2^{-2}$

相　对　波　长：1　$\frac{9}{10}$　$\frac{4}{5}$　$\frac{3}{4}$　$\frac{2}{3}$　$\frac{3}{5}$　$\frac{8}{15}$　$\frac{1}{2}$

第二排、第三排分别叠加更小半音$\frac{24}{25}$（0.353全音）、微音$\frac{125}{128}$（0.205全音）。与尼古拉的35键特制琴相比较，这个键盘只是精简了过分添加的律位，恢复一排键以便于演奏。在这样的键盘乐器上虽然可以得到完美的和声，但这种特制的键盘仍需要专门练习。

2. *在合唱中的纯律运用*

纯律音阶中的纯律六度使二级与六级音之间不足一个纯五度，这成为纯声乐合唱中的一个突出矛盾。例如下面这个片段，在没有伴奏的合唱过程中，要保持每个和弦的和谐准确，就必然会发生音高的浮动，见例45：

例 45



这个片段中的第三个和弦为了保证和谐纯净的效果，a^1 必须降低一个普通音差，后边的和弦也相继降低一个普通音差，而这样的进行重复五次后，整个合唱队的音高降低了一个半音，结果被称为“跑调”。

根据一些研究分析，我们了解到，为了解决这样的问题，作曲家在创作时采用了很巧妙的办法。以复调音乐时期的杰出代表帕勒斯特里那（Giovanni P. Palestrina，约 1526 ~ 1594 年）为例，他用省去六音的办法保持了各声部的平衡，使丰富的复调各声部之间形成的和音清晰而协和，歌词从复杂的声部中清晰地穿透出来，听得很清楚。临时升高六音一个普通音差，也是行之有效的办法。作曲家并没有偷懒地把这个任务简单地做为演唱技巧交给歌者，而是在创作中为各声部做好技术性铺垫，使演唱得以顺利进行。具体的做法是在旋律三度进行中加入经过音，比如在下属音与六音之间加入经过音，加强旋律性而淡化了和谐性，六音则自然转化为一个五度相生律的六度。这是巧妙利用音律运动的自身规律，在作曲技法中进行声部处理来解决纯律在运用中的矛盾。

四、中庸全音律（Mean-tone temperament）的探索

由于纯律音阶有大、小全音，一经转调，这大、小全音的差异就到处可见，使律制变得非常复杂，尤其在键盘乐器上突出地体现了这一矛盾。从 14 世纪以来，管风琴制造业在德国兴盛起来，纯律要在键盘乐器上实现就必须解决这个矛盾。15、16 世纪欧洲有人提出“中庸全音调律法”，把大、小全音加以折衷平均。拉莫斯在他的论文《音乐实践》（Musica practica，1482 年）中已经记述了当时使用中庸全音律的情况。

1. 四分之一音差中庸全音律

16 世纪初，德国管风琴家阿诺尔德·施利克（Arnold Schlick，1460 ~ 1521 年）著书《管风琴制造者及管风琴家之镜》（成书于 1511 年），在书中，他从理论上提出，这一调律法的优点在于使和弦发音和谐，其调整方法是：大全音和小全音之间有一个“普通音差”，是第四次相生而产生的，所以把普通音差分为 4 个小音差，每生律一次，减去“$\frac{1}{4}$普通音差”。①

① 另有资料记载是意大利理论家、作曲家阿让（Pietro Aaron，1480 ~ 1550 年）于 1523 年最早明确定义“中庸全音律”。

中庸全音律五度的音程系数

= 纯五度的音程系数 ÷ $\sqrt[4]{\text{普通音差的音程系数}}$

$= \frac{3}{2} \div \sqrt[4]{\frac{80}{81}}$

$= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt[4]{16} \times \sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{81}} = \sqrt[4]{5} \approx \frac{299}{200}$

中庸全音律五度的音程值全音数如何呢？

中庸全音律五度的音程值全音数

= 纯五度 $-\frac{1}{4}$（普通音差全音数）

$= 3.51 - \frac{1}{4}$（0.11） $= 3.51 - 0.0275 = 3.4825$ 全音 = 696.5 音分

再来看“中庸全音”本身。

中庸全音的音程系数

= （中庸全音律五度的音程系数）^{2} ÷ 2

$= (\sqrt[4]{5})^2 \div 2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \approx \frac{19}{17}$

中庸全音的音程值全音数

= （中庸全音律五度的音程值全音数）×2 － 纯八度全音数

$= 3.4825 \times 2 - 6 = 0.965$ 全音 = 193 音分

根据上述数据，可列出中庸全音律大音阶，来跟纯律大音阶相比较：

表 103

参考音名	c^1	d^1	e^1	f^1	g^1	a^1	b^1	c^2
纯律大音阶	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0	1.02	1.93	2.49	3.51	4.42	5.44	6
中庸全音律七声音阶	1	$\frac{17}{19}$	$\frac{289}{361}$	$\frac{3800}{5083}$	$\frac{200}{299}$	$\frac{3400}{5681}$	$\frac{57800}{107939}$	$\frac{1}{2}$
相对音高（全音数）	0	0.965	1.93	2.52	3.485	4.45	5.42	6
相邻差数		0.965	0.965	0.59	0.965	0.965	0.965	0.59
两种律的差异（全音数）	0	-.055	0	+.03	-.025	+0.03	-.02	0

如此看来，中庸全音律在键盘乐器上是很方便的，它只有一种全音和一种半音，但又能发生纯律效果，能够在一定范围内解决和弦发音和谐的问题，因而在欧洲中世纪至近代的键盘乐器上盛行了数百年之久。当十二平均律已经开始盛行，中庸全音律仍被不少音乐家使用。这种律制也运用在有品的弦乐器上。但这种律制能用的调域有限，只能适用于7个大调和5个小调，当乐曲转调超出这个范围时，音阶中就会出现显著不准的音程，俗称“狼音”①。

2. 对“普通音差”的各种划分而形成的多种中庸全音律

在提出“四分之一音差中庸全音律”（$\frac{1}{4}$comma mean-tone temperament）之前，扎里诺

① “狼音”一词泛指乐器调音不准和乐器制造不良所引起的一切不和谐音，各种律制会产生不同的狼音。

曾经提出过一种“七分之二音差中庸全音律”（$\frac{2}{7}$comma mean-tone temperament）。这样的音程其数理规范是每相生一次，减去$\frac{2}{7}$普通音差，即$\sqrt[7]{\frac{81}{80}}\times 2$，音程值为0.031全音。不仅如此，他还设计了一种19音的键盘，如图37所示，在每个黑键上增加一个键，两相邻白键中再加一键，共19键。（图37）

在那同时期和以后一个世纪中，一直不断地有人提出过“五分之一音差中庸全音律”、“六分之一音差中庸全音律”、“三分之一音差中庸全音律”、“九分之二音差中庸全音律”、甚至“十四分之三音差中庸全音律”。在各种中庸全音律中，最被推崇的还是“四分之一音差中庸全音律”。不过发现“谐音列”的法国声学家索维尔将四分之一、五分之一、六分之一音差这三种中庸全音律进行比较，认为管风琴家和羽管键琴制造家们还是更喜欢五分之一音差中庸全音律。现列表对比三种中庸全音律与纯律和毕达哥拉斯律制（三分三倍相生律）。

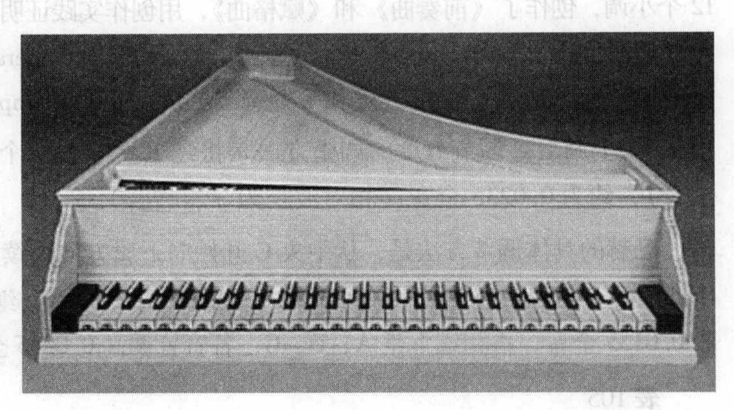


图37

表104

音程 / 与中庸全音律比较	五度	大三度	大六度	半音	五度狼音
纯律	3.51	1.93	4.42	0.56	
三分三倍相生律	3.51	2.04	4.53	0.45	3.39
四分之一音差	3.48	1.93	4.45	0.59	3.688
五分之一音差	3.488	1.953	4.46	0.559	3.627
六分之一音差	3.492	1.967	4.476	0.541	3.589

尽管人们设想了各种对普通音差的划分，都不能解决这样一个问题，即无论多么小的微差，在循环相生若干次以后，这个微差都会像滚雪球般越滚越大。在调性变化越来越丰富的音乐现实中，中庸全音律不是终极解决之路。因此说，十二平均律是历史的要求，只有十二平均律可以解决自由转调的问题。

有一种观点认为，中庸全音律最早并不是施利克提出的。事实上，他设计的是一种不规则律，与中庸全音律有关系，并为自己的主张专门创作了一些乐曲。法国物理学家、音乐理论家梅尔桑也曾提出过一种不规则律，是在四分之一中庸全音律中混合五度相生律。这些做法都是为了消除狼音，但显然在键盘式乐器上行不通，所以并没有理论价值和应用价值。后来提到的所谓不规则律其实是一种调节律，是演奏家们普遍使用的一种方法，后来被巴赫命名为well temperament。

五、巴赫的调节律——Well temperament

这里要澄清一个长期以来的误会。我们一直把巴赫在1722年和1744年分别写成的*Das wohltemperierte Clavier*上、下册翻译成《平均律钢琴曲集》，并解释为有系统地依次使用12个大调和12个小调，创作了《前奏曲》和《赋格曲》，用创作实践证明了这个律制的合理性、可行性。

但事实上，Das wohltemperierte（德语）即Well temperament，这是一个不同于十二平均律的调节律。包含7个纯五度和5个调节五度（well－tempered fifth）。① 这种调节律可以运用在24个调上。调节五度的调整方法是将纯五度减去$\frac{1}{5}$个“最大音差”（$\frac{524288}{531441}$，0.1173全音），约为0.0235全音（相对波长为$\sqrt[5]{\frac{524288}{531441}}$）。

巴赫的具体调节方法是，从中央C开始向下属方向连续6个纯四度相生得♭G，再以♭G这个音的等音♯F四度下生，将新得到的B调高0.0235全音，继续下生E，这个E比纯律大三度高0.0135全音，再相继下生A、D、G，各音皆调高0.0235全音。如此形成的调节律为：

表105

音名	♭G	♭D	♭A	♭E	♭B	F	C	G	D	A	E	B	♯F
相对音高	2.94	0.45	3.96	1.47	4.98	2.49	0	3.484 +.0235	0.947 +.0235	4.4335 +.0235	1.9435	5.43 +.0235	2.94
相邻五度	p-fifth	p-fifth	p-fifth	p-fifth	p-fifth	p-fifth	w-fifth	w-fifth	w-fifth	w-fifth	p-fifth	w-fifth	

这是作曲家本人设计的一种调节律并命名为wohltempereirte（Well temperament），p-fifth（perfect fifth）即纯五度，w-fifth（well fifth）为调节五度。也就是说，巴赫作为演奏家，他从实际出发，有限地借鉴五分之一中庸全音律的方法，结合传统的四度相生法，旨在解决演奏中的音准问题。巴赫创作这个曲集时，主要是为古钢琴或羽管键琴用的（那时钢琴还没有流行），乐器研究家分析了巴赫曲集中的所有曲目，与18世纪时流行的各种不规则律进行对比，可以看出，巴赫有选择地根据调性调整不同的律制。如果因为现在是在以十二平均律调音的钢琴上练习巴赫这个作品集，就以为这个作品集是巴赫为十二平均律而作，这是很不应该有的误会。最重要的是，这个作品集正好说明了一个事实：即使在十二平均律被完全成熟地提出以后，其他律制仍然是实践中的重要理论基础。Well temperament在巴洛克时期发展起来，并一直运用到19世纪末期，这其中最重要的原因是音乐本身。当初设计多律键盘是为了保证音乐的好听，调节律的键盘还是为了音乐的好听。因为调节律并没有完全脱离音律自身的运动规律，建立在自然律制上的音阶所具有的调性和调式色彩是带给音乐美感的真正内力。音乐美学甚至把各种调所具有的特性升华为具体的美学理论，规定了各种调所对应的喜悦、忧伤、爱情、果决等等感情性质。

17世纪中，Well temperament是实践中运用最广泛的，重在解决管风琴和羽管键琴的演奏问题。调节的方法主要是根据和弦的根音，将纯律大三度调的略高。巴赫的学生基恩伯

① 详见http：//plaza.ufl.edu/wnb/baroque_ temperament.htm

格（J. P. Kirnberg）曾经回忆说，他的老师巴赫总是教导他把所有的大三度音程都调得比纯律高。检验一下上表中的数据，情况的确如此。

这一点必须了解并重视。当16世纪盛行的中庸全音律不能解决在大小调上自由转移的问题，17世纪便有很多人提出多种解决方案。人们不停地实验对“普通音差”做各种等分的不规则律，演奏家们自己动手，根据演奏的经验，琢磨出恰当的调节律，虽然没有理论的解释，但却是较为实用的。巴赫曾采用了德国音乐理论家、管风琴制造家韦克迈斯特（Andreas Werckmeister，1645～1706年）的调节律，① 并创作出了系统运用24个大小调的键盘曲。钢琴创制于18世纪初，经过了一段时期的调适，由德国音乐理论家、作曲家马普格（Friedrich Wilhelm Marpurg，1718～1795年）在1756年倡导运用十二平均律（书面的发表迟到1776年），对当时盛行的无规则律设计提出质疑，告诫人们无规则律不可穷尽，键盘乐器应该使用同一种概念和“语言”。到19世纪，十二平均律则成为键盘乐器的标准调音法。

第三节　十二平均律的探索

现在我们对十二平均律的定义是：对纯八度开12次方，12个音的长度比被预先设定为由高到低、($\sqrt[12]{2}$) 幂数从0到11连续排列的，对数计算后各音程间为等音程的律制。与各种自然律所具有的比值质因数规律化、简单整数比性质不同，纯八度被一系列无理数划分，八度内11个中间项皆为无理数。作为一种复杂的数学计算结果，12平均律从不可能完全精确的调准，直到几十年前，随着电子数码技术的发展，有了电子调律技术和仪器，才能真正调出这样的音阶。请注意，是调出而不是自然获得的音阶。尽管如此，若只是从理论计算的角度而言，有人甚至猜测公元前3000年，有着数学天分的苏美尔人就可能已经在一弦器上计算出近似的十二平均律。约瑟夫·芒佐（Joseph L Monzo）根据两块约4000多年前的苏美尔人泥板书②（图38）推测，这个被亚述学专家和数学家们认为是个难题的泥板书上所记录

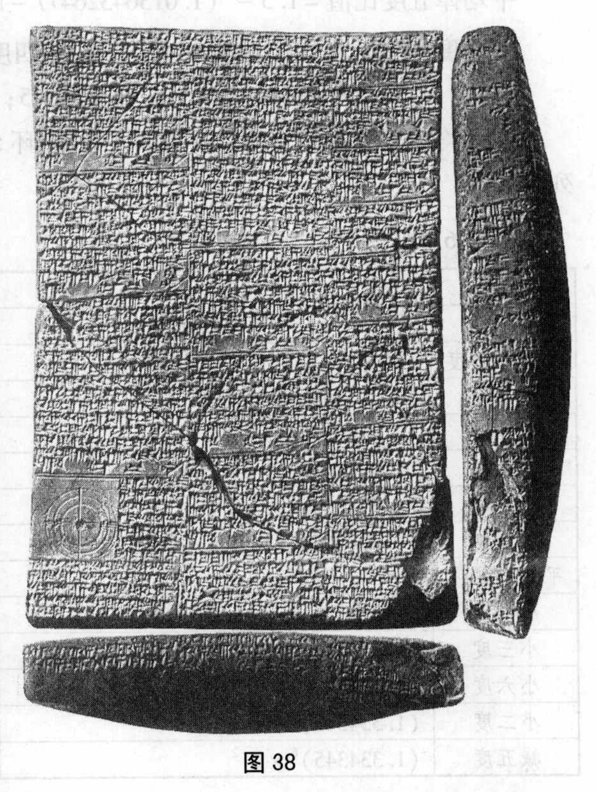


图38

① 事实上，在目前学者的研究表述中，总是称为“韦克迈斯特/巴赫调节律”。

② 现藏于大英博物馆西亚古代文物馆中，编号为BM85194和BM85210的苏美尔人泥板书。

的信息，可能正是现存最早的律制记载，这种律制包括了我们现在称为“毕达哥拉斯律制”和以质数5为界定的纯律。而且，芒佐认为苏美尔人使用的是60进制的计数系统，用二分法对各个局部进行中项划分，所以有更多机会计算出近似十二平均律。①

一、思想方法的变迁

1. 传统的五度循环基础上的调整之法

从历史的角度说，产生寻求十二平均律的需求，根源在于对于跨越“最大音差”这个障碍。人们早就意识到纯五度链循环会规律地产生音差，必须抹平了这个音差，就不会累积为最大音差，才能使五度圈合拢。所以寻找平均律五度就显得非常重要，因此人们首先想到的是求平均律五度。这个演算思维和步骤是：

以纯八度为2∶1，即以一根弦的基音为2，中点高八度为1

纯五度为3∶2　　$3^1 \times 2^{-1} = 1.5$；相对音高为3.51全音。

五度相生12次以后的比值为$3^{12} \times 2^{-19} = 1.01364326477$；相对音高为0.1173全音

平均律五度比值$= 1.5 - (1.01364326477 - 1) \times \frac{1}{12} = 1.49886306$；相对音高=3.50全音。

纯八度　－　平均律五度　=　平均律四度

2　÷　1.498863　=　1.334345；相对音高=2.49679全音≈2.5全音

用平均律五度循环5次、平均律四度循环5次，就得到各律的长度值及相对音高，现列表如下：

表106

音程值	生律法	长度比	相对音高（全音）	校差值②
纯八度		2∶1	6	
平均律五度	$(3^1 \times 2^{-1}) - (3^{12} \times 2^{-19} - 1)^{-12}$	1.49886306	3.503	+.003
大二度	$(1.49886306)^2 \times 2^{-1}$	1.12329524	1.006	+.006
大六度	$(1.49886306)^3 \times 2^{-1}$	1.68366574	4.509	+.009
大三度	$(1.49886306)^4 \times 2^{-2}$	1.26179219	2.012	+.012
大七度	$(1.49886306)^5 \times 2^{-2}$	1.8912537	5.516	+.016
增四度	$(1.49886306)^6 \times 2^{-3}$	1.41736515	3.019	+.019
平均律四度	2 ÷ 1.498863	1.334345	2.497	−.003
小七度	$(1.334345)^2$	1.78047658	4.994	−.006
小三度	$(1.334345)^3 \times 2^{-1}$	1.18788501	1.490	−.01
小六度	$(1.334345)^4 \times 2^{-1}$	1.58504842	3.987	−.013
小二度	$(1.334345)^5 \times 2^{-2}$	1.05750072	0.484	−.016
减五度	$(1.334345)^6 \times 2^{-2}$	1.4110708	2.981	−.019

① 参见约瑟夫·L·芒佐（Joseph L. Monzo）的 *JustMusic*：A NEW HARMONY，自“微音理论百科”，见网页 http：//tonalsoft. com/enc/number/12edo. aspx（2004～2005年）

② 以今天国际十二平均律制作为尺度来看，表106中的数值偏高或偏低若干全音，这一差值姑且称为较差值。以正号表示偏高，以负号表示偏低。

以上计算所得结果与现代十二平均律的差别是听觉无法分辨的，所以已经达到效果上的平均律，只是还没有得到一个高度概括化的表达。

2. *以半音相生的方法*

文艺复兴（欧洲 14～16 世纪）以前有人尝试过用托勒密小二度$\frac{17}{18}$的比值（计 0.4948 全音，约 99 音分）连乘 12 次的律制，这在计算上很接近十二平均律。意大利音乐理论家、作曲家、琉特琴演奏家加利莱伊①曾用这个规定在琉特琴上设置半音品位。各音的规定如下表：

表 107

音名	c^1	$^{\#}c^1$	d^1	$^{\#}d^1$	e^1	f^1	$^{\#}f^1$	g^1	$^{\#}g^1$	a^1	$^{\#}a^1$	b^1	c^2
长度比	1	$\frac{17}{18}$	$(\frac{17}{18})^2$	$(\frac{17}{18})^3$	$(\frac{17}{18})^4$	$(\frac{17}{18})^5$	$(\frac{17}{18})^6$	$(\frac{17}{18})^7$	$(\frac{17}{18})^8$	$(\frac{17}{18})^9$	$(\frac{17}{18})^{10}$	$(\frac{17}{18})^{11}$	$\frac{1}{2}$
相对音高	0	0.495	0.99	1.484	1.98	2.474	2.97	3.463	3.96	4.453	4.95	5.443	6
与平均律之差		-.005	-.01	-.016	-.02	-.026	-.03	-.037	-.04	-.047	-.05	-.057	
换算成音分数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	

但这种以半音连续相生的办法与上述五度循环的先天性缺陷是一样的。无论多么小的音差经过若干次相生后，都会像滚雪球一样越滚越大，以规定比例相生 12 次后，比数变得非常大，$(\frac{17}{18})^{12}$的比值大于$\frac{1}{2}$（0.5），等于$\frac{1259}{2500}$（0.5036），相对音高为 5.9373 全音。

以半音相生的结果虽然很接近十二平均律，但在音律的物理内涵和数理认识方面却是没有价值的。首先，活生生的旋律中，音律自然相生是以纯五度和纯律大小三度为动力的；其次，这种办法并不是数理意义上的八度内平均划分。1000 年以前，公元 7 世纪，中国的刘焯也曾用半音相加这样的思路，但囿于数学、声学认识的局限，他不可能解决这个问题。②

以五度循环为基本思路，早期寻找十二平均律的生律方法都不脱这个窠臼。比较一千多年前中国何承天新律的探索，③ 思路基本是一致的：五度循环相生；对最大音差做 12 等分。但由于数学学科水平的局限，何承天的方法错了。上列这种以平均律五度循环的计算方法虽然没错，但只是缩小了音差，并不能消除以一个规定比例生律就必然产生音差这个事实。平均律的数理规定必须同时满足算术划分、和谐划分和比例划分的三维要求，因此十二平均律期待着数学发展为它带来最终的解决。

---

① Vincenzo Galilei，1520～1591 年，是天文学家伽利略的父亲。

② 参见下编第二章第五节之二刘焯律表 37。

③ 与表 36 中的数据相比较。

二、西蒙·斯台文对十二平均律的研究

据可靠记载，从16世纪起，在欧洲，为了解决普通音差所造成的繁杂局面和中庸全音律的不足，不断有人从事十二平均律的研究。荷兰数学家兼工程师斯台文（Simon Stevin，1548～1620年）于1596年也提出了十二平均律。① 长期以来，五度循环生律方法的重要性，使人们总是局限在这样一个范围里思考问题。斯台文虽然走出了五度循环的模式，但仍然以寻找平均律五度为突破口。由于他与朱载堉是同时代的人，从创立与发表十二平均律的时间来说，斯台文略后几年。他们的方法与结果成为一对有可比性的研究实例。

1. 斯台文的计算方法

今天，我们可以很容易地了解到斯台文的思路是这样的：首先确认纯八度为$1:\frac{1}{2}$，在这个纯八度之间找出13项连比式的11个中间项，每两个项中间可以同时满足插入算术中项、和谐中项和几何中项的要求，② 即对$\frac{1}{2}$进行12次开方，得到的半音就是平均律半音。他的计算过程是：

第一步：计算十二平均律五度（$3\frac{1}{2}$全音）的比值，设其为$\sqrt[12]{\frac{1}{128}}$③，再将这个数扩大10000倍，即$\sqrt[12]{\frac{1}{128}}=(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^7=6674$。斯台文只算出了这四位数；

第二步：6全音减去$3\frac{1}{2}$全音，得到平均律四度$2\frac{1}{2}$全音，即$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^{12}-(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^7=(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^5=7491$；

第三步：平均律五度减去平均律四度，得平均律全音，即$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^7-(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^5=(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^2=8909$；

第四步：平均律全音的平方，即为平均律大三度，$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^4=7937$④；

第五步：平均律四度减去平均律大三度，得平均律半音，即$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^5-(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^4=$

---

① 见斯台文的《歌唱艺术的理论》（*Van de Spiegheling der Singconst* "On the theory of the art of singing"）根据Adriaan Fokker的英译点校本，收于Adriaan Fokker编辑的*Principal Works of Simon Stevin* vol. 5阿姆斯特丹1955～1966年，第413－464页。

② 1. 算术中项的定义是：用一组数的个数作除数去除这一组数的和所得出的平均值；2. 和谐中项：算术中项的倒数；3. 等比中项（几何中项）：作为n个因数乘积的数的n次方根。这三个条件的公式是这样：a为算术中项、h为和谐中项、g为等比中项。两个数用p和q表示。$p-a=a-q$；$\frac{1}{p}-\frac{1}{h}=\frac{1}{h}-\frac{1}{q}$；$p:g=g:q$。将表108中任意相邻两项都可以带入这三个公式中检验。同样对于第118页表72中朱载堉的数据也可以将每相邻两项带入这三个公式中检验。

③ 斯台文书写的开方符号为"√（n）a"，是他那个时代的样式，见原文第443页。这可能会引起些误会，所以此处写为通常的开方式，√（n）a＝$\sqrt[n]{a}$。

④ 经笔者验算得7937，比斯台文算出的7936更精确，正好100音分。参见英译点校本第447页。

$\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$=9438。

将他的思路及数据整理可以列出下表：

表 108

音名	音程值	斯台文设定	同底幂积	简化形式	斯台文长度	音程	相对音高（全音）	校差值
c^1	基音	1			10000	一度		
$^\sharp c^1$	$\frac{1}{2}$全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$	$\sqrt[12]{\frac{1}{2}}$		9438	小二度	0.5007	+.0007
d^1	全音	$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^2$	$\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$	8909	大二度	0.9999	-.0001
$^\sharp d^1$	$1\frac{1}{2}$全音	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^3$	$\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$	8409①	小三度	1.499	-.001
e^1	2 全音	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^4$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	7936	大三度	2.001	+.001
f^1	$2\frac{1}{2}$全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{32}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^5$		7491	四度	2.500	
$^\sharp f^1$	3 全音	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^6$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	7071	不良大四②	3.000	
g^1	$3\frac{1}{2}$全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{128}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^7$		6674	五度	3.500	
$^\sharp g^1$	4 全音	$\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^8$		6298	小六度	4.002	+.002
a^1	$4\frac{1}{2}$全音	$\sqrt[4]{\frac{1}{8}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^9$		5944	大六度	4.5029	+.0029
$^\sharp a^1$	5 全音	$\sqrt[6]{\frac{1}{32}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^{10}$		5611	小七度	5.0019	+.0019
b^1	$5\frac{1}{2}$全音	$\sqrt[12]{\frac{1}{2048}}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^{11}$		5296	大七度	5.502	+.002
c^2	6 全音	$\frac{1}{2}$	$(\sqrt[12]{\frac{1}{2}})^{12}$		5000	纯八度	5.9999	-.0001

2. 斯台文与朱载堉的比较

虽然斯台文在16世纪的最后10年间完成了十二平均律的理论，③ 但并没有发表，甚至斯台文自己也没有认为这个重要发现有什么科学价值。他的手稿直到1884年才被人发现并发表，而在这之前，已经由其他人完成了这个历史使命。关于这位几乎与朱载堉同时创建

---

① 在斯台文的原手稿中，这个数为8404，经英译者校勘为8409。见 *Principal Works of Simon Stevin* vol. 5 第447页。

② 斯台文命名为“不良大四度或不良小五度”。

③ 近半个多世纪以来，关于他的完成时间一直存在着争执，主要是为了确定他和朱载堉谁为先的问题，所有的推测结论都在1585～1608年之间。朱载堉至晚在1581年前就已经创建并完成了十二平均律的理论和计算。

十二平均律理论的斯台文，另外一个争论的焦点是：他是否受了朱载堉的启发。[①] 从以上演算过程可以比较出以下几点：

（1）朱载堉设黄钟倍律与黄钟正律之间为2：1，在这两项之间寻找11个等比数列；斯台文在一弦器上找出中点，在这个1：$\frac{1}{2}$之间寻找13个连比式的11个中间项。

（2）朱载堉以$\sqrt[12]{2}$简单连乘；而斯台文的被开方数各不相同。因为他是先将被开方数乘方再开12次方，将1扩大为整数10000，用比例关系计算。

（3）朱载堉的突破点是找出应钟倍律与黄钟正律之间的半音。通过相继开平方求比例中项蕤宾倍律、南吕倍律，最后开立方求出应钟倍律，整个计算非常简洁。而斯台文将突破口放在先找平均律五度的方根代替原来的3：2，经过复杂的五个步骤，求出平均律半音。

（4）精密度只有4位数，远不如朱载堉所达到的25位数精确。

（5）斯台文的手稿中有一个错，已经由英译者校勘，但整个方法并没有错，虽然不如朱载堉的方法精炼。

综上所述，可以得出结论：作为一个工程师，斯台文有很高的数学修养，他自己独立完成了十二平均律的理论建设。他特别在自己的论述过程中强调，由于希腊语中没有“等比”这个词，所以希腊人没法产生这样的思维。而荷兰语中有“等比”（Everedenheyt，英译为 equirationality）这个词，所以只有荷兰人才会得到寻找平均律的思路，[②] 在八度内插入数学中间项，完成十二平均律的理论建设。当然这表现了他的夜郎自大和不健康的民族主义，但同时也说明他独自完成理论建设这个事实。但由于缺少对音乐的了解，他看不到自己的成果所具有的高度价值，不仅如此，甚至在当他谈论毕达哥拉斯律时，他可以意识到“林玛半音”和“阿波托美半音”的存在[③]，却没有任何专业化表述，而这些术语已经使用了两千年以上。由此可以看出，他本人对音乐理论的了解是非常有限的。正是这些专业知识方面的欠缺，使他与在西方创建十二平均律理论第一人的荣誉，历史地失之交臂。

三、梅尔桑的十二平均律

法国物理学家、音乐理论家梅尔桑在他的名著《普遍的和谐》（*Harmonic universelle* 1636年）中提出了平均律半音的比值数据。他的基本思路也是要改进毕达哥拉斯纯五度，抹平纯五度的小微音差，他建议半音比值为$\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}}=1.0597326$,[④] 这比伽利略用托勒密小三度连续相生的十二平均律要精确的多。

① 昔人李约瑟（J. Needham）认为斯台文可能从耶稣会教士那里获得了来自中国有关朱载堉等程律理论的信息。戴念祖先生也持此观点。详见《中国声学史》第327页。

② 见 *Principal Works of Simon Stevin* vol. 5 第429页。

③ 同上。第431页。他提到256：243这个半音太小了，但古希腊人仍把它当做半音，并批评希腊人没有纠正这个错误。

④ 见 http：//en. wikipedia. org（维基百科）Marie Mersenne 条目。

现将他的规定计算列表如下：

表 109

音程值	生律法	简化	长度比值	相对音高（全音）	校差值
半音	$\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}}$	$\sqrt[4]{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}$	1. 0597326	0. 5022	+. 0022
全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^2$	$\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}$	1. 1230333	1. 0044	+. 0044
$1\frac{1}{2}$全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^3$		1. 19011487	1. 5066	+. 0066
2 全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^4$	$\frac{2}{3-\sqrt{2}}$	1. 2612035	2. 0088	+. 0088
$2\frac{1}{2}$全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^5$		1. 33653849	2. 511	+. 011
3 全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^6$	$(\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}})^3$	1. 41637385	3. 0132	+. 013
$3\frac{1}{2}$全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^7$		1. 50097708	3. 5154	+. 0154
4 全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^8$	$(\frac{2}{3-\sqrt{2}})^2$	1. 59063427	4. 0176	-. 0176
$4\frac{1}{2}$全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^9$		1. 68564707	4. 5198	-. 0198
5 全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^{10}$	$(\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}})^5$	1. 78047657	5. 022	-. 022
$5\frac{1}{2}$全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^{11}$		1. 89125332	5. 5242	-. 0242
6 全音	$(\sqrt{\sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{2}}}})^{12}$	$(\frac{2}{3-\sqrt{2}})^3$	2. 00611350	6. 0264	-. 0264

从现有的材料来看，梅尔桑提出这个方根似乎是在几何学的推导和弦乐器上实验而得出的。由于开方术的局限，他用逐步开方的步骤达到半音的比值，被开方的数值不合逻辑，而且这个方根所得到的音程结果也不如斯台文的数据精确，但在方法上却是简洁的。直接得到半音的值，再依次连乘，体现出当时已经清楚地掌握了对十二平均律的理想认识，但还不是直接得自对纯八度的比例划分。梅尔桑在各个修道院教授哲学和神学并致力于哲学和神学的写作。在那个还没有科学期刊诞生的年代，梅尔桑与各国的数学家、科学家有着广泛的通信联系，这使他成为信息交换的中心，这种角色使他有机会得到许多新知识、新信息。他能够发现倍波原理、对质数研究的杰出贡献以及提出这种逼近绝对平均律半音的数理规定，并用弦乐器来实验证明，大概是得益于这种良好的学习与思考环境。梅尔桑在普及十二平均律方面是一个重要人物，虽然他的半音比值假设并没有太高的律学价值，但仍是人类在平均律探索道路上的成果之一。事实上，他不仅是第一个发

表十二平均律数据的人（前文已经提到斯台文的论文迟至19世纪后期才被发现），他还通过观察管乐器的自然发音和弦振动而产生的复合音，成为第一个发现并描述和谐级数存在的人。

17 世纪晚期至 18 世纪前期，理论家和管风琴制造家们努力完善十二平均律的理论数据，并将之付诸键盘乐器的调律实践，在这个过程中发挥过重大作用的，一般认为是德国音乐理论家、管风琴制造家韦克迈斯特。他在自己的著作 *Musicalische Temperatur*（1691年）中发表了关于十二平均律的数据，产生了较大的影响。

第六章　在物理学、数学新概念激励下的律学研究

17 世纪初叶，伽利略（Galileo Galilei，1564 年～1642 年）对声学做出了一个决定性的推动。在 1638 年出版的《关于两门新科学的对话》（*Dialogue Concerning two New Sciences*）中，伽利略指出，音调的高低是由它的振动频率决定的；振动频率的比例关系是两个音的相对高度的原因。他还认识到弦的振动频度与弦的长度、张力和质量有关。但他认为振动的绝对频率是无法测量的。在这著作发表的同时，梅尔桑也发表了他的《普遍的和谐》，书中指出：弦的振动频率和弦的张力的平方根成正比，与和弦的长度以及单位长度上的质量的平方根成反比。梅尔桑第一个测定了振动的绝对频率，这意味着他已经可以论证纯八度之间的频率比为 2：1。梅尔桑还认识到，弦线除了产生频率为 n 的基音之外，还同时产生频率为 3n 和 5n 的两个与基音协和的泛音。由于他对弦振动倍频音的发现，他有能力将对十二平均律的数理计算转化为物理表达，从而从声学的角度完全解释十二平均律的本质与存在方式。到 17 世纪前半叶，十二平均律的理论和实践已基本完成，17 世纪时就有作曲家开始应用这种律制。

第一节　对数的发现和小微音差的表达

一、对数的发明并被用于音乐领域

前边所论述的所有律制品种，在表达时所用的音程值都是我们现在已经驾轻就熟的方法，但这并不是一开始就有的，尽管已经能对纯八度做出精确的十二等程划分，但还没有手段对等程的音高做出准确的、一目了然的描述。苏格兰人约翰·纳皮尔（John Napier，1550～1617 年）在 1614 年发表的对数定义与对数表，不仅给当时的天文学家带来了计算上的巨大方便，也为音乐现象的描述做好了准备。

15 世纪末，法国人尼古拉·屈奎特（Nicolas Chuquet，1445～1488 年）发现了等差数列加减和等比数列乘除之间是对应的，这就是说将两者对应列表，就可以把乘法运算转换成加法。又过了半个世纪，德国数学家施迪弗又将负数和分数也分别加入到等比数列中，并进一步指出，等比数列中的乘除法可以转换为等差数列中相对应数的加减法。直到 1614 年，苏格兰人纳皮尔明确将对数定义为 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$，这样计算就简化多了。他花了近 20 年的时间制作了 7 位有效数字的对数表。英国人亨瑞·布利格斯（Henry Briggs，1561～1630 年）和荷兰人阿德利安·佛拉哥（Adriaan Vlacq，1600～1667 年）制作了以 10 为底

的 1 到 100000，精确到 14 位的常用对数表，发表于 1628 年。瑞士人欧拉是 18 世纪最杰出的数学家之一，他不但在数学上做出了伟大贡献，而且把数学成功地应用到了其他领域。他创用了音程值单位为“μ”（希腊语读作“密优”）的对数表达，把八度值 2 的常用对数扩大到 1000，也就是说，一个纯八度分为 1000 个小单位，所有各音程系数的常用对数都按这个比例放大。从此，对音程的表述才真正有了由内到外的双重量化，真正做到了完善、清晰的科学化表达。自那以后，相继有法国人萨瓦尔、英国人埃利斯、日本人田边尚雄使用了不同的音程值计量单位，后两者设计的计量单位才真正与音乐的乐学结构相衔接。①

二、小微音差的发现

五度相生律和纯律各有一个令人注目的音差，即上文提到的“最大音差”（古代音差）和“普通音差”，大小相近。1726 年，法国音乐理论家拉摩发现了这两者之间的极小差距，并名之为“小微音差”（semicomma minime）。这个极小的音差长度比为 32805：32768（$3^8 \times 5 : 2^{15}$）。这时，拉摩不仅可以数理地把握这个微小的差异，同时还能用欧拉创用的音程值单位将这个微小的差异描述为 1.6666667 密优。从长度比括号内的质数与幂数可看出，每相距 8 个纯五度又一个纯律大三度的两音之间就存在这样一个音差，利用它可以进行律与律之间的替换。回顾表 12“三分损益律半音音阶”中“夷则”正律至“黄钟”半律之间的音程（1.92 全音），和纯律大三度（1.93 全音）正好相差一个“小微音差”。在生理听觉上，“小微音差”是听不出来的。在古代音乐家的听觉中，这两律彼此协和，受同一数理支配，夹钟与林钟、无射与太簇半律、仲吕与南吕所构成的音程，也近似纯律大三度，只相差一个“小微音差”。无射与仲吕两律的律数在《淮南子》中之所以会转化成含因数 5 的数值，其数理根由亦在于此。《琴书大全》中调弦时对相距“小微音差”按音纯律徽位处理也出于同样的律学根据。②

第二节　谐音列与共泛音结合

自从索维尔（Joseph Sauveur，1653 ~ 1716 年）于 1700 年通过观察与实验，发现在全弦振动的同时，还有二分之一振动、三分之一振动等等一系列分段振动的谐音，并且用纸游马在振动弦上确定了波节和波腹的位置，对振动现象相关的一些名词加以详细解释，还解释了拍现象。亥尔姆霍兹对谐音做了大量开发，通过实验手段，研究了谐音对音色、音质各方面的影响作用。拉摩则最早运用谐音原理，说明在四分之一、五分之一、六分之一的节点上可以构成大三和弦，也就是说，在谐音列上，第 4、5、6 号谐音产生大三和弦（$\frac{1}{4}:\frac{1}{5}:\frac{1}{6}$）。这个事实早已被扎里诺从数论的角度解析出来，那么，物理学的新发现则

---

① 详见第 10 – 11 页。

② 详见第 53 页、第 106 页。

能够证明这个结论是正确的。但小三和弦（6：5：4）还缺少物理学的实证。意大利小提琴家、作曲家塔尔蒂尼发现了合成音（combination tone），他认为合成音是和声的基础低音，这可以理解为演奏家从实践的经验获得对谐音列现象的确定。因为如以合成音为基音，那么，它上方的音程就相当于它的泛音。

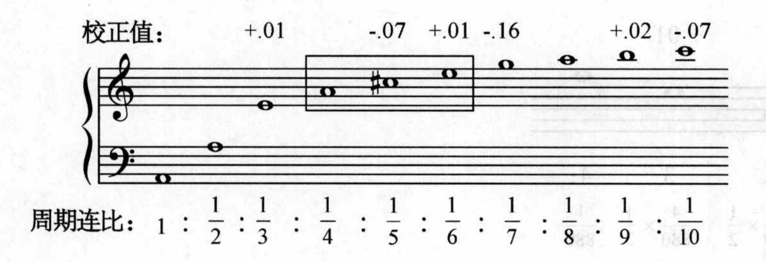
一、迷人的沉音列概念

拉摩在掌握了声学和谐音列的研究成果后，提出小三和弦的自然基础来自弦的下方共振，这弥补了先前缺少声学根据的缺憾。虽然他自己的实验并不成功，导致他另觅新径，从而提出另一个同样很重要的小三和弦双重基音理论，但他起初对小三和弦的产生源自下方共振的认识却是正确的。以后又有德国作曲家和理论家豪普特曼、物理学家和音乐理论家厄汀恩以及厄汀恩的学生、音乐理论家里曼也相继发表类似的观点，称其为“沉音列”，在小三和弦各音的上方找到共泛音的统一因素。

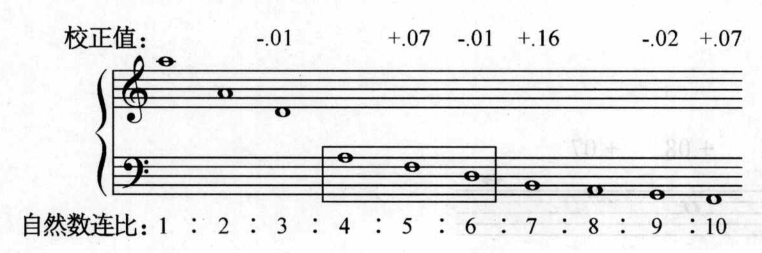
如何理解“沉音列”呢？厄汀恩曾经给过一个定义：“所有这些乐音，它们具有一个，并且是同一个泛音，人们称它们为这个乐音（泛音）的沉音列。”①

可以用谱例具体化地说明这个概念。

例 45　谐音列上的大三和弦



例 46　沉音列上的小三和弦



---

① 厄汀恩 *DAS DUALE HARMONIESYSTEM*，原文为“Alle Töne，die einen und denselben Oberton haben，nennt man Untertöne dieses Tones.”。莱比锡 西格尔音乐书店 1913 年出版（Leipzig 1913，Verlag von C. F. W. Siegel's Musikalienhandlung）第 23 页。

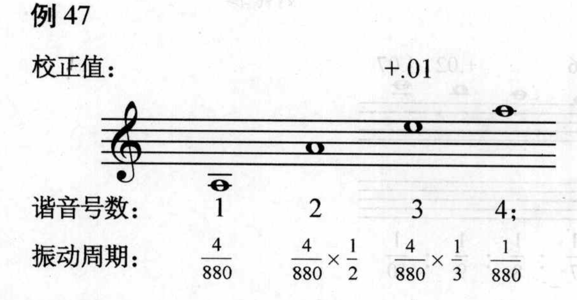
这两个音列如同倒映形式。在谐音列中，数列呈自然数的倒数，是和谐划分；在“沉音列”中自然数为等差算术划分。这展示出弦长的特性，例45表明一条弦可以划分为二等分、三等分、四等分、五等分、六等分……，得到比基音高的一系列音，相反，把这条弦的长度加长二倍、三倍、四倍、五倍和六倍……，则会得到比基音低的一系列音，如例46中的音列。前者构成大三和弦，后者构成小三和弦。此前，扎里诺已经做出最初的、独创性的、并且非常正确的解释。谐音列的理论帮助人们进一步理解到，比基音低的这一系列乐音各自也都有一个谐音列，并且都包含有一个共同的谐音，那就是第一号音。可以以小三和弦为解剖标本来了解共泛音结合法则。

二、小三和弦的共泛音结合样式

小三和弦由沉音列上四倍波、五倍波和六倍波三个音构成。以这三个音分别作为基音，写出各自的谐音列前段，我们可以看出在上方，它们有一个共同泛音 A。根据标准音 A 每秒振动440次，振动周期为$\frac{1}{440}$，这个共泛音是它的高八度，振动周期为$\frac{1}{880}$，那个四倍波则是低八度，振动周期为$\frac{1}{220}=\frac{4}{880}$。现在将各音的泛音及共泛音图示如下。

（1）四倍波为基音，

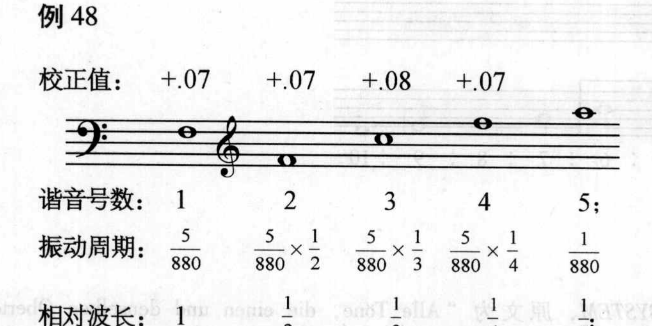
例 47



相对波长： 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$；

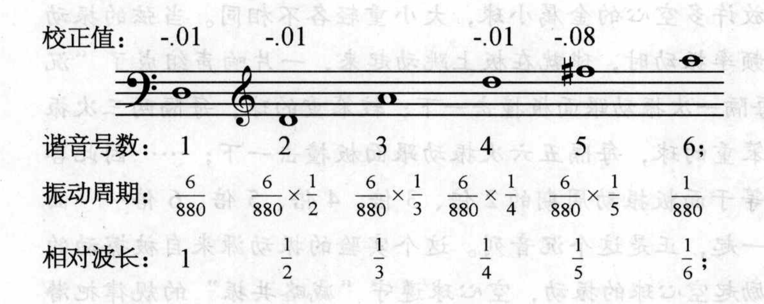
（2）五倍波为基音，

例 48



（3）六倍波为基音，

例 49



以上三个基音的谐音列段与波的倍数成正比渐次加长，三个基音的谐音列最右端是一个共同的泛音，下面将三个基音与共泛音由低到高排列，

例 50



从以上的抽取过程，可以看到所谓“沉音列”其实就是由一个“共泛音结合”在一起的音列。小三和弦正是在这种共泛音结合法则的支配下形成的，它的振动周期比是自然数连比。这种音列可以一直向下延伸。上文例 46 中所示 10 个音可以分别写出由短渐长的谐音列，第一号音作为共泛音，将其余 9 个音包容在一起共振。

虽然拉摩、里曼等人在当时条件下都不能证明发音体的下方共振是沉音列的物理基础，但由于对谐音列的理解以及对小三和弦是大三和弦的倒映的理解，还是建立起了有相似性的小三和弦双重基音论与和声二元论的观点。

三、沉音列是否存在

由于一直不能得到实验室的证明，“沉音列”长期没有名正言顺的地位。人们认为“沉音列”没有自然依据，所以是唯心主义的、臆造的。尤其受到以唯物主义作为美学思想基础的学派的批评。直到 20 世纪 20 – 30 年代，有人在电子振荡器上听到了这个音列，但这仍然不能为沉音列正名。俄国人曾经在 20 世纪初通过实验证实了沉音列的存在，但在整个意识形态领域以批判形式主义为哲学、美学思潮特征的当时，这个实验新发现并没有成为

音乐学界的有利营养。赵宋光先生曾在一篇文章中详细转述了这个实验：[①]

> 在一个较宽的共鸣箱上用两只码子架起一条弦，让弦能在琴弓摩擦下振动发音，在共鸣箱的面板上放许多空心的金属小球，大小重轻各不相同。当弦的振动迫使共鸣箱面板以同样频率振动时，球就在板上跳动起来，一片响声组成了"沉音列"。较轻巧的球，每隔一次振动跟面板撞击一下；较笨重的球，每隔两三次振动跟面板撞击一下；更笨重的球，每隔五六次振动跟面板撞击一下；……因此各金属球的振动周期分别等于面板振动周期的2倍、3倍、4倍、5倍、6倍……面板和球所发出的音合在一起，正是这个沉音列。这个实验的振动源来自被擦动的弦，弦振动通过面板激励起空心球的振动，空心球遵守"减略共振"的规律把潜藏的振动周期显露出来，使人能够听到。以弦和板振动13次为例，其中含有1、3、5、7、9、11、13次振动相隔的周期，也含有1、4、7、10、13次振动相隔的周期，还含有1、5、9、13次振动相隔的周期。

由此可见，沉音列的存在是有现实物理依据的，它的特征是上方有一个共同泛音，以减略共振的规律显示振动周期，律学表述形式是自然数连比式。可能用以第1号音为共有泛音的"共泛音音列"这样的表达更容易被理解和接受。这样的音列总体上呈现出阴暗的色彩，可以产生小和弦。

四、和声二元论[②]的发展历程

自从16世纪时，扎里诺将音乐理论与数学结合起来，用和谐六数列和数学六数列来说明和声产生的原理，奠定了和声学理论的基础，并从一开始就具有二元论的雏形。18世纪时，拉摩在掌握了音响学和谐音列的研究成果后，更深刻地认识到和声（各类协和音程与大三和弦）本身就包含在发音体的共振中，具有明确的物理基础，发音体本身各部分的振动，包含了和谐振动。所以说，和声学是物理学—数学的科学。拉摩从谐音列产生大三和弦，联想到下方共振是小三和弦的自然基础。但由于实验中，弦的下方十二度和十七度之间并无共振，使他放弃了这个设想，转而寻找其他原因。塔尔蒂尼认为大和声由弦的和谐划分成为不相等的部分（上行音列）而形成，小和声则由弦的等差划分为相等的部分（下行音列）而形成，所以，虽然大小和弦三度叠置的原则相同，但方向是相反的。他的看法成为和声二元论的先驱。

亥尔姆霍兹从音响学出发，也认为小三和弦有双重起源，他的基本解释也属于双重基

---

① 详见赵宋光《数在音乐表现手段中的意义》，《美学》第五辑，1983年出版。现收入《赵宋光文集》第二卷46－78：78页。

② "二元论"这个术语是指大调小调具有同等意义和价值，两者产生的来源相反。见桑桐"和声学"条目。

音论。即 g 音同时是复合音 c 和复合音$^{\flat}$e 的组成部分，所以，小三和弦 c－$^{\flat}$e－g 可以认为是复合音 c 加$^{\flat}$e 音，或者是复合音$^{\flat}$e 加 g 音，这就是双重基音。

前边提到的厄汀恩的和声二元论思想是最具有独创性的，成为里曼的和声理论体系的核心内容之一。里曼也遭遇了沉音列实验的失败，他不得不放弃为沉音列寻找物理基础的想法，但一直坚持二元论观点。二元论观点由于得不到物理学的证明，使其倡导者不得不另觅出路，但二元论观点的影响却是深远的，并在其基础上派生出双重基音论和同源变体论。

在现代和声学领域中，和声二元论理论的最典型继承者是莱比锡学派，他们继承了谐音列产生大和弦、共泛音结合产生小和弦的理论，开拓了纯律的数理领域，用七分、七倍生律解释属七和弦和“Ⅱ级七和弦”律学规范。但在当时，苏联作为社会主义阵营的思想领袖，正在批判唯心主义和形式主义，这种乐律学领域的积极开拓成果受政治干预的影响并没有广泛传播开去。

莱比锡学派在把通过“七分生律法”或“七倍生律法”所生的音律纳入和声功能理论加以讨论时，所用的概念是“莱比锡音差”（Leipziger Komma $\frac{64}{63}$）①，这个音差的音程值＝0.14 全音、“莱比锡变化半音”（Leipziger Chroma $\frac{15}{14}$）② 音程值＝0.59 全音，承认十二平均律可以模拟、仿制它们。

上文曾提到用$\frac{17}{18}$规定作为半音来寻求十二平均律的途径是错误的，但这个音程所包含的乐律学深刻意义却是不容忽略的。17 这个自然数最初在相隔不远的时代出现在淮南子律数（公元前 2 世纪）③、托勒密小二度，这不能说是偶然巧合。在数理领域，人们早就掌握了划分数列中项而得到合乎审美听觉的音程。$\frac{17}{18}$这个逼近现代十二平均律的半音本来是有物理审美依据的，在大全音 9∶8 的前提下，同时放大一倍，寻找到算术中项，即：

	18	：	16	
	18	：	17	： 16
相邻音程系数：	$\frac{18}{17}$		$\frac{17}{16}$	
相邻音差（全音）：	0.495		0.52	

于是大全音被分割为小、大两个相近的半音。

正如在下编第二章第一节中对淮南律数 17 的分析中所提到的，这个自然数是解释减七和弦来源的根据。④ 这个早在公元前 2 世纪就被发现的音律关系，在当时的音乐生活中不会

---

① 参见第二章第二节“七分七倍生律法”，这个音程系数见 *Praktiche Harmonik des 20. Jahrhunderts*（《20 世纪的实用和声技法》）FRITZ REUTER 著，MITTELDEUTSCHER VERLAG HALLE（中部德意志出版社〈哈雷〉成书于 1952 年夏）第 42、71 页。

② 同上，第 55 页。

③ 参见下编第二章第一节，55－56 页。

④ 参见表 24。

产生乐律学价值，但早已为和声学理论建设做好了准备。

众多科学家兼音乐理论家仍在探索和声的音响学根据，并从音响学领域来解释形成和声二元论的观点。发表十二平均律数据的梅尔桑同时也是《和声学的问题》(*Questions Harmoniques*，1634)、《声音的本性》(*De la Nature des Sons*，1635) 和《普遍的和谐》(*Harmonie Universelle*，2vols. 1636) 等著的作者。① 及至近代，欣德米特的《作曲技法》一书仍以谐音列与合成音为基础来探讨和声，形成独特的、有个性的和声理论体系。也就是说，尽管十二平均律在理论上已经完全成熟，在键盘乐器的制造调音方面已经是很通用的，但人们关于和声理论的认识却始终坚守声学基础，寻找和弦功能的自然根源。

第三节　各种多律位的平均律

由于纯律抽象出来的不等程音阶，在器乐音乐变得越来越丰富的音乐时尚中，成为乐器上的一个主要矛盾，所以，从16世纪起，人们不断地研究在多种乐器上如何运用纯律。中庸全音律在转调方面仍有局限，于是，人们开始提出多律位的平均律，前后分别有琉特类乐器上设三十一平均律的品位、十九律和三十一律的键盘、四十一平均律、五十三平均律等等。

一、不同的五十三平均律或趋匀律

英国物理学家博桑奎特（R. H. M. Bosanquet，1848～1923年）1876年提出“五十三平均律”，这是一种对纯八度比例划分，即确定半音为$\sqrt[53]{2}$，每律计0.1132全音。

日本物理学家兼音乐家田中正平（Tanaka shohei，1862～1945年）则于1890年在德国发表“五十三纯律”，利用两种极小的音差变换来解决纯律律数无限扩张的问题。这两种变换，一为“斯基斯马”，就是相距八个纯五度又一个大三度的两音之差，振动周期比 = $\frac{2^5}{(\frac{2}{3})^8 \times \frac{5}{4}}$ = 0.9989，音程值 = 0.0095全音，即拉摩所说的“小微音差”；一为“克来斯马”，即相距一个大三度又五个小三度的两音之差，振动周期比 = $\frac{4}{5} \div (\frac{5}{6})^5 \div 2$ = 0.9953，音程值 = 0.04全音，只有“最大音差”（0.12全音）的三分之一。田中正平还特别主张用自然七度来构成大小调中的属七和弦。田中正平的基本思路与其他平均律思维是不同的。他是以纯律生律法扩大生律，将纯律音系网放大，产生了这两种极小音差。这种由自然音程所规定的生律比例连续相生，与公元前1世纪中国律学理论家京房的作法有共同的一面，但两人所依据的音程有所不同，其最终结构也不尽相同。

19世纪后期在英国和德国先后发表的“五十三律”律制与京房早在公元前1世纪就算出的五十三律之相似，这也不是一个偶然巧合。在一个八度内以某种相生法寻求律数扩张，

---

① 参见 *The International Cyclopedia of Music and Musicions*（国际音乐与音乐家百科大全）Marin Mersenne条目，第1388页。

从而达到均匀的目标是有限度的。人类的听觉能力表明，五十三律的划分是适度而且可用的，如果不足五十三律或多于五十三律都于追求均匀的初衷相悖。关于这一点，在京房六十律的相关章节已做讨论。

二、二十四平均律

在阿拉伯乐系中，为了维护中立音程的传统，又要解决实际演奏与理论律制的矛盾。19 世纪时，由阿拉伯音乐理论家兼数学家穆沙卡提出二十四平均律。它既具有律制上的规范性，又可以模仿谐音列上任何的邻比关系，无论是围绕第 7 号谐音，还是第 11、13 号谐音建立的音程关系，它都可以模拟之。这个律制的提出，终于解决了阿拉伯律制中中立音问题，使阿拉伯音乐风格得以摆脱五度相生律和纯律强加的桎梏，其风格与表情特色得到充分的理论支持和审美解释，这也是阿拉伯人对世界律学理论做出的一个重大贡献。

常常会看到一些将印度“22 斯鲁蒂”解释成为二十二平均律，其实这是对古代乐律学成果的误解。如今，用开方的方法，很容易获得二十二平均律的数据结果，$\sqrt[22]{2}=1.0320082797$，音程值≈0.27 个全音≈54.55 音分。但早在 2000 多年前产生“斯鲁蒂”表述体系时，人们还没有能力预先设定任何一种平均律，更没有能力调出平均律。“斯鲁蒂”是对能听到的最小音的描述，是对感觉量的描述。在印度古代音阶的运用中，这个最小的音有时表现为普通音差（0.11 全音）。所以最初的斯鲁蒂概念并不是平均律。

人们接受平均律是由于它近似自然律，它的各种音程可以当作自然音程来感受。换句话说，从音乐声学的角度讲，人耳内部听觉器官的传递机制提供了分辨乐音音高、并将不合自然数比例关系的微小差别校正到具有共振关系范围内的能力。平均律产生之初并不是要取代、排斥自然律，在实践中，十二平均律可以作为各种不同性质的自然律的简便易行的仿制品、代用品。在理论上，十二平均律音程提供了一种方便的尺度（音程值或以平均律半音为 100 音分，或以平均律全音为 1），以简明的量度来比较各种各样的自然律音程，并成为音律测定与计算中的数学框架。

十二平均律在倍半关系（八度）的基础上用开方的方式寻找无理数（不能用一个整数或两个整数的比率来表示的任何一个实数），在它模拟整数关系时，当它在近似于整数关系的范围内，这时它是有审美价值的，但这个审美价值不是来自于无理数，而是由于它模拟整数关系，中耳和内耳的共振关系已经将那些偏离整数关系的音程纳入到整数关系中，音乐听觉的审美无论协和或不协和，都服从于整数比例关系。对于这一点，我们必须有清楚的认识。由于乐理知识通俗讲法中的缺陷，作为工业文明的产物——十二平均律被认作世界通行的金科玉律，对于它本质上反自然规范的特点缺少了解，由此引起的误会，已经误导了一批批学生和学者的思维，对十二平均律意义的误解、作用的夸大正如同工业污染，对民间音乐的弘扬也是一个极大的损害。

第七章　中国近现代乐律学研究状况

第一节　20 世纪上半叶的律学研究

一、在律学研究中引进欧洲的声学、数学方法

中国现代律学的专门研究始于20世纪初，最早的专题论、著见于1930年前后，刘复、杨没累、王光祈、杨荫浏等人开始发表一些文章，介绍、引进欧洲用数学方法研究律学的成果，并用新理论来评述古代乐律学成果及研究笛、琴、琵琶等乐器音律。最具代表性的有刘复的数篇关于管弦乐器发音原理和音律计算的论文，他不仅列出西方所用的音响计量单位的频率和我国传统律数的对应关系，成为将西方声学知识与中国传统律学研究及音乐实践相结合的先行者：最早用现代算术公式表达朱载堉“新法密率”，最早引进埃利斯创用的音分计量法，从现代科学的角度对中国古代律学遗产进行客观评述。刘复还于1930年主持了对北京故宫和天坛所藏清宫古乐器的测音工作。① 王光祈于1929年发表了中国第一部引进西方音乐声学的著述，② 书中从物理、生理、心理三个方面探讨音响的发生、现象、性质、客观效应等问题，对国内采用现代方法研究律学有重要的启迪作用。50年代以后，杨荫浏等人开始对出土编钟进行测音并对其数据作律学分析，这种对编钟的研究，随着考古发现及研究新成果的产生，也随之向纵深发展，直到70年代末80年代初对曾侯乙编钟的全面研究，律学研究也因为有了对地下地上乐器实物的测音数据而产生了重大成果。杨荫浏早期也发表了一些论文，介绍管弦乐器音律计算方法和研究律学的数理方法，时间晚于刘复，但内容更切近实际。③ 杨先生的律学研究不仅仅是用现代的科学方法梳理中国古代律

---

① 所有这些学术活动及成果详见刘复的论文《刘复教授致其弟天华先生书》（北大月刊，1924年第三号）；《琵琶及他种弦乐器之“等律”定品法》（国学周刊，1926年，第十六期）；《音律尺算法》（音乐杂志，1928年第一卷第一、二号）；《从五音六律说到三百六十律》（1927年演讲稿，载辅仁学志，1930年第一期）；《十二等律的发明者朱载堉》（蔡元培先生六十五岁庆祝论文集，1932年）；《吕氏春秋古乐篇昔黄节解》（文学，1934年第二卷第一号）；《天坛所藏编钟编磬音律之鉴定》（国立北京大学国学季刊，1932年，第1卷第2号）。

② 王光祈的《音学》1926年撰于德国，1929年9月由上海启智书局出版；1934年中华书局出版；1992年由巴蜀书社辑入《王光祈文集·音乐卷》。

③ 杨荫浏早期的研究成果有《平均律算解》（1937年，燕京学报，第二十一期）；《谈笛音》（1947年，礼乐，第十六期）；《七弦琴徽分之位置与其音程比值》（1948年，礼乐半月刊第一期）；《再谈笛律答阜西》（1948年，礼乐，第二、三期）。20世纪50年代以后发表了《谈琵琶音律》（1958年，民族音乐研究论文集，第三集）；《信阳出土春秋编钟的音律》（1959年，音乐研究，第一期）；《关于春秋编钟的音律问题》（1960年，音乐研究，第一期）；《管律辨讹》（1979年，文艺研究，第四期）；《三律考》（1982年，音乐研究，第一期）等等。

学遗产，还制作了多种律器，绘制多种律表，为了使律学研究能服务于音乐实践的需要，对当今笛、琴、琵琶等乐器的律制问题，提出了许多有益的见解。特别是对从北宋初年（960）到崇宁三年（1104）期间六次的黄钟律高的变化进行推测计算，用现代声学、律学的计量表示，把古代音乐实践的具体事实和现代律学研究手段联系起来。最为可贵的是，在他晚年发表的《三律考》中，对中国音乐在运律方面进行学术总结，同时反思自己在早期对中国民间音乐所运用的特殊音律因其不合十二平均律而取否定态度是不正确的，坦率地承认民间音乐中的中立音现象正是要表达特殊的情感，是平均律不能替代的。

二、对东西方律制进行比较研究

在比较音乐学方法论的影响下，产生了一批以比较东西乐律为研究方向的成果。① 其中最重要的论、著当推王光祈的《东西乐制之研究》② 和《东方民族之音乐》③，他采用田边尚雄创用的平均律全音数的计算方法，对中国、欧亚非三洲接壤诸国、希腊、欧洲中古和近代的不同律制和乐制进行比较研究，并在这种实证方法的基础上，根据形态特征对世界音乐进行分类，为世界音乐研究建立了基础理论。尽管他的分类法被后来更丰富的研究成果证明是有缺陷的，但他作为学科拓荒者的历史定位却是毋庸置疑的。他在自己的著作中用现代方法解释中国古代的定律法和音律计算法。厘清中国古代以管定音，以弦长计算定律的事实，用国外当时的研究方法解释介绍中国黄钟的长度和律管计算方法，也是开创中国律学研究面向世界的先例。

缪天瑞的专著《律学》从 1950 年 3 月万叶书店初版、1963 年人民音乐出版社修订版、1983 年人民音乐出版社增订版及至 1996 年 1 月人民音乐出版社第三次修订版，是律学作为一个专门学科，在中国现代音乐教育中占有一席之地的标志，从每一新版本篇幅的渐次增加，足见内容的渐次充实完整，可以说现在老中青几代的律学研究者都是读着这本书走上律学的学术之路。

该书 1983 年版共十章，前五章侧重于律学的原理，后五章侧重于律学的应用，十章的标题是：导论、音律计算法、五度相生律、纯律、十二平均律、中国律学简史、欧洲律学简史、四分之三音体系史料、亚非地区几种民族乐制、今天各种律制的应用问题。

1996 年版在前一版基础上将 80 年代以来中外有关律学研究的新资料或新成就补充进来，或根据这些新资料加以修改，加进今人对古代律学和民族乐制研究的新成就，还增加了“律学研究的新时期”一节；第八章由以前的“四分之三音体系史料”增添改写为“阿拉伯－伊朗律学简史”，第九章因原有非洲若干乐制不够系统而删去，章名改为“亚洲地区

① 早期文论有杨昭恕的《中西音律之比较》，音乐杂志，第 1 卷第 2 号，1920 年 4 月版；萧友梅的《中西音乐的比较研究》，音乐杂志，第 1 卷第 8 号，1920 年 10 月版；王光祈的《东西乐制之研究》，上海中华书局民国 17 年（1928 年）版，《东方民族之音乐》，上海中华书局 1929 年版。

② 见王光祈《王光祈音乐论著选集》上册第 125－198 页。

③ 见王光祈《王光祈音乐论著选集》下册第 1－163 页。

几种民族乐制”，第十章标题改为“律制的应用”。从这几版扩充的内容也正可以看出我国近一个世纪以来，律学研究方法的发展及研究范围的扩大，及至理论化的成熟进步。

律学对于当前的音乐实践和音乐学研究仍在发挥作用。20 世纪 80 年代以来，民族音乐研究中，在测音分析的基础上，对某些地区、民族的音乐中存在的特殊音程给予律制解释，找出数理依据，从而指导民族多声音乐体制的建立与发展，探索既便于定音乐器演奏又体现民族民间音乐特有风格的新律制，成为律学研究领域里的新气象。通过考古新发现提出的新课题更构成了近一个世纪以来律学研究的主要内容。

第二节　20 世纪下半叶的乐律学研究

一、琴律研究

在中国古代音乐史理应反映的古代音乐史实中，琴律是长期失载的角落，黄翔鹏在为《中国大百科全书》音乐舞蹈卷撰写的“琴律”条目释文中说：

> 琴律是朱熹提出的一个律学名词。这一名词虽然晚至南宋才出现，但琴律的实践源于先秦钟律和五弦、七弦的琴的艺术。春秋编钟的测音研究证明钟律用管子五音为基础兼采纯律三度的生律法，这只在“均钟”的性能与琴律相关时才有可能。先秦钟律到秦以后失传，但它的实践在汉以后的七弦琴艺术中保存下来。两晋隋唐间，琴的艺术已有甚大发展，而琴的律学特点失载。北魏陈仲儒曾把琴五调与调律问题并提，但亦简略不明，宋代进入一个传统学术大整理时期，才有朱熹《琴律学》的出现。但人们对琴律的认识只是到本世纪 70 年代后期，才在音乐考古学的新发展中引出有关律学研究的新课题。①

由于琴律的长期失载，使我们不得不采用这样一个倒叙的方式：从朱熹提出“琴律”这个名词，推及到曾侯乙编钟铭文的内部逻辑其实就是琴律，继而伸展到琴律学的研究。知道了琴律是这样的源远流长，也就可以理出乐律学发展的两条线：一条是有不间断记载、不间断发展的三分损益律，如我们前面所谈到三块里程碑，② 并看到了三分损益法发展到极至而带来的反弹力，即何承天、朱载堉们的由繁至简的十二平均律探索。另一条就是始终存在于实践、并隐匿于大量琴学文献中的琴律的发展。在理论与实践密切联系与直接沟通方面，琴论与琴谱的互参互证为琴律研究提供了巨大的现实可能性。陈应时发表了系列文章，对琴学文献中大量有关琴律学的资料进行解读、分析，并于 80 年代中期就写成了《琴律学》的书稿，虽然由于出版方面的原因，一直未能面世，不能不说是律学研究的一个损失。所幸的是，陈先生以系列论文的发表方式公布了他的一些研究心得，能够让我们与他分享。

---

① 见黄翔鹏为《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》撰写的“琴律”条目。

② 下编第二章第三节的结语，第 68 页。

二、对曾侯乙编钟铭文的律学内涵之研究

关于钟律就是琴律的研究，最集中而全面的是崔宪，① 他的研究之重大突破在于找到了钟律与琴五调之间的联系，系统论证了钟铭所体现的钟律之根本就是琴五调基本律学关系的另一种表现形式，这样的结论在客观上使历代一些难解与不可解的乐律学史料死而复生，一些已成定论的史料有了新的解读可能。比如，经过严密核算后，对《管子》五音、《国语》五降、陈仲儒琴五"调"等有关文字，有了新的认识眼光，认为这些都是与琴有关的文献。当然，成功吻合的计算首先基于他前期的标点、整理工作。其间的知识和技术的含量也是非常高的。

研究成果表明，曾侯乙编钟铭文是对琴律的具体描述。而琴律就是对琴弦的声学特性以及它能生成的乐律关系的抽象化、制度化。

表 110"颽曾体系"音系网示意图（部分）②

三、琴律研究方法体系化

自古律学文献所用的律数都是相对长度，三分损益法就是长度的按比率增减。五四运动以后，刘复等人认为频率才是科学的，因而使用频率比，变成长度关系的倒数形式，这未免有些自讨苦吃。因为中国传统律学观念有其深刻的自然根据，音律的数学理论及表达与自然现象有着顺对应：

宏——大——低——长；

细——小——高——短

这种听觉经验与音乐审美意蕴有着同构关系，这也是全人类古老文明共有的理论，古中国、古希腊、古印度与中古阿拉伯都有共同的长度关系的律数表达。③

杨荫浏也谈到管长有误差，弦长则较精确。④

黄翔鹏更是以精释的《均钟考》直接提示曾侯乙编钟的调律根据在于琴律。

在琴律研究中，绝对弦长并不重要，相对弦长才是重要的。而相对弦长只能适用于一根弦的范围内，古琴七条弦散声各不相同，绝对弦长都是相等时，要能表达出同一相对弦长数值在不同弦上奏出不同的音律，就必须建立相对波长的概念。

由于定弦法与琴谱谱字涉及的大量数学计算，形成沉重的智力负荷，使熟悉这领域的专门人才无暇通晓音乐史的全局；而音乐史研究者又难以从这领域中提炼梳理出沟通理论

---

① 见其专著《曾侯乙编钟钟铭校释及律学研究》。

② 同上，第 158 页。

③ 关于这一点，赵宋光在其文《中华传统律学的复兴与开拓》有详细论说，在本书之上编中也用大量篇幅阐述这个道理。

④ 见《管律辨讹》。

表 110

校正值							-32								
现代音名							♯F								
二次低列							素商之頔								
校正值							-18	-16	-14	-12	-10	-8	-6	-4	
现代音名					D	A	E	B	F	♯C	♯G	♯D	♯A	♯E	
一次低列					商	羽	宫頔 宫角 素宫之頔	徵頔 徵角	商頔 商角	羽頔 羽角	徵頔下角	羽頔下角			
校正值	-14	-12	-10	-8	-6	-4	-2	+2	+4	+6	+8	+10	+12	+14	
现代音名	♭C	♭G	♭D	♭A	♭E	♭B	F	C	G	D	A	E	B	♯F	♯C
基列	变宫	变徵	变商	宫曾	徵曾 徵頔下角	商曾	和 羽曾 羽頔下角	宫	徵	商	羽	下角 角	徵頔 徵角	商頔 商角	羽角
校正值					+10	+12	+14	+16	+18	+20	+22				
现代音名					♭G	♭D	♭A	♭E	♭B	F	C				
一次高列					变徵	变商	宫曾	徵曾	商曾	羽曾	宫居				
校正值										+36					
现代音名										♭A					
二次高列										变羽					

实践、证实古今流变的清晰线索。如何把数学计算的脑力负荷降低到最低限度，使琴学研究者从繁重的脑力劳动中解放出来，律学界应该提出一套简便易行的分析方法。赵宋光在琴律研究方面，一直致力于分析理论体系的建立，他的琴律分析体系的严密逻辑，现从已发表的《七弦琴定弦过程数学方程的建立与求解》、《古琴徽分的顺逆推算》两文可管窥一二。在这两篇文章中，在前人研究基础上，把各种定弦散声条件下各琴徽相对弦长所对应的音律全都用相对波长表述。

1. 对定弦过程用数学方程式表达

在《七弦琴定弦过程数学方程的建立与求解》一文当中，他运用代数思维，设计了简洁的方程等式，可以把古代琴律文献中用繁复文字表达的定弦过程逻辑化呈现，运用方程式可以整理出琴律文献中所记载的琴五调及外调调弦法。如该文根据《五知斋琴谱》所载，先对“正调”进行解读：

原文“先用大间，散挑七弦，而左大指按四弦九徽……”① 转译为一系列方程：

［七］ = ［四］ $\times\frac{2}{3}$

［六］ = ［四］ $\times\frac{3}{4}$

［七］ = ［五］ $\times\frac{3}{4}$

［六］ = ［三］ $\times\frac{2}{3}$

［七］ = ［二］ $\times\frac{1}{2}$

［六］ = ［一］ $\times\frac{1}{2}$

这种方括号内填入汉字的代数表达有两重含义：

（1）具有地址意义。所填数字为弦的序号数，弦的序号数用汉字表示；

（2）具有数值意义。等于某弦散声相对波长的数值。

同时设定，在正调规范之内，［一］ =1。

前述系列方程已经表明各弦散声相对波长与各徽相对弦长之间的数值相互关系，现只需将数据代入方程，四弦散声相对波长为$\frac{2}{3}$。故，［七］ = ［四］ $\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$。其他依此类推。

运用这种方程式，可以对琴学文献，如下编第二章第七节所分析过的《五知斋琴谱》、《琴学入门》等等众多文献进行轻松解读。

2. 徽分计算方法

在《古琴徽分的顺逆推算》一文中，则建立了徽分的计算方法。以一弦为标本，给出根据徽分数据计算相对弦长的公式，重在突破各徽间距离不相等状况所造成的难点，

① 详见第 91 页所引《五知斋琴谱》原文。

让研究者可以根据公式，简便算出任何徽分数据的相对波长所对应的徽间音位（相对音高）。

这个公式的思路是这样，徽分按音的相对弦长（由真分数化为小数形式）减去右侧徽位相对弦长，这个差数除以两徽间的距离。① 例如在下编第二章第七节“琴律学”之“三分损益律徽外音”中的“下暗徽”（$\frac{8}{9}$），与二弦散声相应，在《碣石调幽兰》中被描述为“十三下半寸许”；《琴书大全》中描述为“十三徽外六分七厘”。图15中提供的信息是，十三徽至龙龈的距离为全弦的$\frac{1}{8}$，从表42中我们查出十三徽的相对弦长为$\frac{7}{8}$，有了这几个条件，就可以推算徽间音位。先将十三徽位的相对弦长（即正调一弦上十三徽的相对波长）以及下暗徽的相对弦长全部化为小数形式，写出如下等式：

（徽外音相对弦长 － 十三徽相对弦长） ÷ 十三徽至龙龈的相对弦长

$$=\left(\frac{8}{9}-\frac{7}{8}\right)\div\frac{1}{8}=(0.8888889-0.875)\times 8=0.1111$$

根据这个计算结果，可以明确这个徽外音为“十三徽一分”。

用这个计算方案，可以为正调一弦按音建立起“徽间音位相对弦长数据模式”，根据相对波长所含生律质因数的特征，分为六种类型，每类分上、中、下三准，这个数据模式在下、中、上三准依次移高一个八度、两个八度，共形成18个数据模式，然后在各弦上移位，共形成126个数据模式，将这126条数据制成126个表格。以3分生律类、一弦下准为例，所有相对弦长数值分母含3，属于第一类，制表为：

表111 3分生律类·下准

表1－1－1·一弦（“表1－1－1”表示第一类—下准—第一弦）

相对弦长（正调一弦的相对波长）	借用音位	校正值	所登记的徽序号	推算过程的算式	计算结果	写成徽分
$\frac{2048}{2187}$		+.07	十三	(0.9364426－0.875)×8	0.4915	十三徽半
$\frac{8}{9}$		+.02	十三	(0.8888889－0.875)×8	0.1111	十三徽一分
$\frac{64}{81}$		+.04	十	(0.7901235－0.75)×20	0.8025	十徽八分
$\frac{512}{729}$		+.06	九	(0.7023320－0.6666667)×12	0.4280	九徽四分
$\frac{2}{3}$		+.01	九	(0.6666667－0.6666667)×12	0	九徽
$\frac{16}{27}$		+.03	七	(0.5925926－0.5)×10	0.9259	七徽九分
$\frac{128}{243}$		+.05	七	(0.5267490－0.5)×10	0.2675	七徽三分

① 见第86页图15。

如此编制出126个徽分登记表格，作为琴律学理论数据库的基本内容。

这些数据可以穷尽古琴演奏中所涉及的所有徽分可能。从某一自然音程所要求的按音相对弦长数值，推算相应的徽分，这是顺向推算。

根据所设定的徽分，推算出相应的相对弦长，这是逆向推算。

古琴减字谱是指位谱，演奏者根据谱中的指示，按某弦某徽分，就可以得到一个确定的音高。律学的责任需要对此进行充分剖析，不是被动地从演奏中得知某徽分按音是什么音程，而要主动把握每个按音节点的音律内涵。逆向推算法系统化地将一条弦上所有的徽位和徽间音位都转换成相对长度数值，设计公式为：

（徽位的相对长度数值 + 徽分的相对长度数值）÷ 空弦全长的相对数值

作者将空弦全长的相对数值设定为1200，这样可以保持整数局面，很容易运用四则运算来求每个徽分的相对弦长。每两徽间含九分，全部设定为 $13\times9=117$ 个徽分数值，按规定公式计算得出117个相对弦长数值。根据图14、15中的数据，可以求出十三徽各徽的相对长度数值以及每两徽间每一分的相对长度数值。例如：

欲求六徽五分的相对弦长：

六徽的相对长度数值 $=1200\times\frac{2}{5}=480$；

六、七两徽之间的一分相对长度数值 $=1200\times\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=12$

代入公式（徽位的相对长度数值 + 徽分的相对长度数值）÷ 空弦全长的相对数值

六徽五分 $=(480+5\times12)\div1200=(40+5)\div100=0.45=\frac{9}{20}$

用这样的方法建立起理论数据库。先求出各徽的相对长度数值、每徽以左徽分的相对长度数值、实际推算用计算公式，设计成一个包含一至十三徽、徽分相对长度数值、13个公式的基本数据表格。然后将13个公式代入，求出117个徽分的相对弦长，制成详尽的徽分登记表。

用徽位计算法和徽分顺逆推算法，可以制作出详尽的琴律登记表，建立琴律学现代化研究方法体系，对琴谱、琴论中隐藏在繁琐文字描述中的律学内容进行清理，把握琴律、琴论中有价值的遗产，使封尘太久的琴律传统得到新世纪的开拓。

四、有关笛律的研究

在西方，长期以来，人们认为管弦同长同音，直到18世纪，近代物理学流体动力学研究发现，才促使音乐领域管口校正问题成为研究热点，甚至直到19世纪末，“管弦同长同音”仍是非常权威的说法。而在中国，荀勖笛律所获得的系统而又简单的管口校正数则是发生在3世纪，这一音乐声学史上的创举令西方人惊讶不已。荀勖笛律在古代解决了管口校正问题，但由于只是经验性约数而非物理学上的精确数据，并允许随机修正加以补正，作为一种科学成就来看待，其学术价值与历史价值就都显不足，所以侧孔校正仍是一个物理学难题，而荀勖的方法和数据本身也形成一个研究视点，这方面的研究除了一些散见于

各音乐期刊上的论文，比较集中的成果展示体现在王子初的专著《荀勖笛律研究》。该著的基本观点是：

1. 通过实验，实证分析得出荀勖管口校正形式为“侧孔校正”而非“端口校正”，否定了此前先验地套用声学的端口校正公式解释“荀勖笛律”的方法论，指出近现代物理学所提出的管口校正计算公式以及明代朱载堉所用理论方法均为端口校正，并非我国笛类乐器制作业的经验性做法。

2. 经过实验，实证分析得出荀勖十二笛为异径管，否定了此前“同径管”说。

3. 通过实验证明荀勖的“管口校正数”只是具有实用价值的经验性约数，否定了此前荀勖“管口校正数”为“宫角之差”说。

4. 荀勖对端口不做校正虽不足取，却另外反映出笛律与琴律的联系，因为荀勖笛上角声不做校正，听觉上接近纯律大三度，符合当时古琴实践上常用十一徽的运律习惯。

5. 荀勖笛律体现了近似十八律意识，是在实践中寻求十八律的重要先驱。

6. 证明荀勖十二管是“正律器”而非乐器，对此前被批评为“不可吹”做出重要正名。

五、有关中立音的研究

包括中立音程的律制（Neutral tone） 如果把“中立音”广泛地理解为在相距半音的两音律之间插入的音律，它的出现可追溯到古希腊单声音乐时期，即前文曾介绍过的“四分音四音列”。

中国各地普遍存在的中立音程真正得到律学上的重视和理论解释始自20世纪，第一次以确切的律学表述发表则是在《律学》1983年增订版，有专门一节《中国等地的中立音程》①，特别提及秦腔苦音音乐和山西中路梆子音乐中常用的含中立音的调式，并首度命名为中立音徵调式。② 该著根据测音数据得出如下结论：这种中立音徵调式实际已进入四分之三音体系的范围，可以视为五声体系与四分之三音体系的结合；如将该调式中的四度音作为主音，则构成中立音宫调式，其中的中立四度可以认为是谐音列中的11号谐音，与主音的频率比是11∶8，计551音分。

对中国音乐中立音程做出真正建设性理论阐述，当推赵宋光的一篇专题论文《关于$\frac{3}{4}$音的律学假设》。③ 该文以“跃迁”概念解释了普通五声调式转化为中立音五声调式的数理通道：

徵调类色彩音可能半降，羽调类色彩音可能半升，各自有“11化”、“13化”两条途径。

徵调类色彩音，以相对波长数值来表述，在阳仪中是$\frac{1}{27}$，在阴仪中是32。在两种结构

① 见《律学》第203－206页。
② 同上第204页。
③ 该文首发于《中央音乐学院学报》1982年第2期，第8－12页。

中，该色彩音都有半降的数理通道。

甲、呈现徵调类色彩的三阶音列作阳仪表述：

	徵		羽		宫
波长连比	$\frac{1}{24}$	:	$\frac{1}{27}$	:	$\frac{1}{32}$

↓

$\boxed{\frac{1}{27}\times\frac{27}{26}=\frac{1}{26}}$　　$\times\frac{27}{26}$是徵调类色彩音半降的“阳仪 13 化跃迁算子”。

↓

	$\frac{1}{24}$	:	$\frac{1}{26}$	:	$\frac{1}{32}$
	$=\frac{1}{12}$	:	$\frac{1}{13}$	:	$\frac{1}{16}$
间距音程系数	$\frac{13}{12}$		$\frac{16}{13}$		

乙、呈现徵调类色彩的三阶音列作阴仪表述：

	徵		羽		宫
波长连比	36	:	32	:	27

↓

$\boxed{32\times\frac{33}{32}=33}$　　$\times\frac{33}{32}$是徵调类色彩音半降的“阴仪 11 化跃迁算子”。

↓

	36	:	33	:	27
	=12	:	11	:	9
间距音程系数	$\frac{12}{11}$		$\frac{11}{9}$		

羽调类色彩音，以相对波长数值来表述，在阴仪中是 27，在阳仪中是$\frac{1}{32}$。在两种结构中，该色彩音都有半升的数理通道。

丙、呈现羽调类色彩的三阶音列作阴仪表述：

	羽		宫		商
波长连比	32	:	27	:	24

↓

$\boxed{27\times\frac{26}{27}=26}$　　$\times\frac{26}{27}$是羽调类色彩音半升的“阴仪 13 化跃迁算子”。

↓

	32	:	26	:	24
	=16	:	13	:	12
间距音程系数	$\frac{16}{13}$		$\frac{13}{12}$		

丁、呈现羽调类色彩的三阶音列作阳仪表述：

	羽		宫		商
波长连比	$\frac{1}{27}$	:	$\frac{1}{32}$	:	$\frac{1}{36}$

↓

$\boxed{\frac{1}{32}\times\frac{32}{33}=\frac{1}{33}}$　　$\times\frac{32}{33}$是羽调类色彩音半升的“阳仪 11 化跃迁算子”。

↓

$\frac{1}{27}$: $\frac{1}{33}$: $\frac{1}{36}$

$=\frac{1}{9}$: $\frac{1}{11}$: $\frac{1}{12}$

间距音程系数　$\frac{11}{9}$　　$\frac{12}{11}$

在该文发表 15 年之后，赵宋光先生在讲课中又指出，纯律的大三度与小三度也有转化为中立三度的跃迁通道，它们分别是$\times\frac{40}{39}$及其倒数、$\times\frac{45}{44}$及其倒数。

在大调内，主音上方纯律大三度音是大调秉性的标识，相对波长是$\frac{4}{5}$。它作半降演变的数理通道有两条：$\times\frac{40}{39}$、$\times\frac{45}{44}$。

大调音阶前半截

	主音		重属音		（大）中音		下属音
波长连比	1	:	$\frac{8}{9}$	:	$\frac{4}{5}$	:	$\frac{3}{4}$

↓

$\boxed{\frac{4}{5}\times\frac{40}{39}=\frac{32}{39}}$　$\times\frac{40}{39}$是大调中音半降的“阳仪 13 化跃迁算子”。

↓

1 : $\frac{8}{9}$: $\frac{32}{39}$: $\frac{3}{4}$

间距音程系数　$\frac{9}{8}$　　$\frac{13}{12}$　　$\frac{128}{117}$

纯律大三度$\frac{4}{5}=\frac{32}{40}\rightarrow\frac{32}{39}$，中立三度$\frac{32}{39}$音程值 = 1. 7124 全音，342. 48 音分；

$\frac{4}{5}$

↓

$\boxed{\frac{4}{5}\times\frac{45}{44}=\frac{9}{11}}$　$\times\frac{45}{44}$是大调中音半降的“阳仪 11 化跃迁算子”。

↓

1 : $\frac{8}{9}$: $\frac{9}{11}$: $\frac{3}{4}$

间距音程系数　$\frac{9}{8}$　　$\frac{88}{81}$　　$\frac{12}{11}$

纯律大三度$\frac{4}{5}=\frac{36}{45}\rightarrow\frac{36}{44}=\frac{9}{11}$，音程值 = 1. 737 全音，347. 408 音分。

在小调内，主音上方纯律小三度音是小调秉性的标识，相对波长是$\frac{5}{6}$。它作半升演变的数理通道也有两条：$\times\frac{39}{40}$、$\times\frac{44}{45}$。

小调音阶前半截

	主音	重属音	（小）中音	下属音
波长连比	1 :	$\frac{8}{9}$:	$\frac{5}{6}$:	$\frac{3}{4}$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{5}{6}\times\frac{39}{40}=\frac{13}{16}}$$ $\times\frac{39}{40}$是小调中音半升的“阴仪13化跃迁算子”。

$$\downarrow$$

$$1 : \frac{8}{9} : \frac{13}{16} : \frac{3}{4}$$

间距音程系数 $\frac{9}{8}$ $\frac{128}{117}$ $\frac{13}{12}$

纯律小三度$\frac{5}{6}=\frac{40}{48}\rightarrow\frac{39}{48}=\frac{13}{16}$，音程值=1.797全音，359.46音分；

$$\frac{5}{6}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{5}{6}\times\frac{44}{45}=\frac{22}{27}}$$ $\times\frac{44}{45}$是小调中音半升的“阴仪11化跃迁算子”。

$$\downarrow$$

$$1 : \frac{8}{9} : \frac{22}{27} : \frac{3}{4}$$

间距音程系数 $\frac{9}{8}$ $\frac{12}{11}$ $\frac{88}{81}$

纯律小三度$\frac{5}{6}=\frac{45}{54}\rightarrow\frac{44}{54}=\frac{22}{27}$，音程值=1.773全音，354.55音分；

以上演示的是一个音调模型的跃迁过程，完整的跃迁实现是在调式音阶中，下边只列出结果，举两个例子。

表122 “13化跃迁”“苦音徵调式五声音阶”①

徵调式五声音阶唱名	徵	‡清羽	宫	商	‡清角	徵
供参考的现代音名	g	‡b	c^1	d^1	‡f	
相对弦长比例	1	$\frac{13}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{24}$	$\frac{1}{2}$
相邻两音音程系数	$\frac{16}{13}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{13}{12}$	
相邻两音音程值（以全音数表示）	1.797	0.693	1.02	1.797	0.693	

① 具体计算过程详见笔者的《“中立音”音律现象的研究》。

表 113 “11 化跃迁”韩国半降羽徵调式五声音阶

徵调式五声音阶唱名	徵		^{c}羽		宫		商		^{c}角		徵
供参考的现代音名	g		^{c}a		c^1		d^1		$^{c}e^1$		g^1
相对弦长比例	1		$\frac{11}{12}$		$\frac{3}{4}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{11}{18}$		$\frac{1}{2}$
相邻两音音程系数		$\frac{12}{11}$		$\frac{11}{9}$		$\frac{9}{8}$		$\frac{12}{11}$		$\frac{11}{9}$	
相邻两音音程值（以全音数表示）		0.753		1.737		1.02		0.753		1.737	

自 1982 年《关于$\frac{3}{4}$音的律学假设》一文的问世，1983 年版《律学》添加了“中国等地区中立音程”一节之后，很多学者撰文针对各地民间音乐中这种特殊音律现象进行理论分析，形成初具规模的有关中立音现象的资料积累及理论研究。在这个基础上，有关中立音程的全面研究较集中地体现在李玫的《“中立音”音律现象的研究》。此文从音乐声学、实用律学、乐器学、民族音乐学等多重角度，历史地看待这个音律现象，对此进行专门研究；音响来源得自社会调查，测音数据得自中国艺术研究院音乐研究所音响视听技术室；文献来源得自正式出版物和调查记录。主要论点：

1. “中立音”是合乎谐音简比关系的自然音律现象。并且已经在音乐实践中形成了朴素的应用体系；“中立音”的使用有着复杂的人文意义的价值取向，这种听觉偏爱具有鲜明的审美特征。

2. “中立音”作为音响的主观感受，与客观物理量度之间的对应关系可以借助现代数学表达式得以体现。

3. “中立音”现象是散见于世界各地的具有相似外表的音律现象，但其间的文化联系各不相同。有些是文化的各自独立发生、至今仍属不同的音乐体系，有些则由于文化传播的历史机缘而属体系内的纵向传承发展。

立足于自然数和简单整数比值原则的研究方法还要提到应有勤在《重新认识甘美兰的斯连德若音阶》长文中用律学的方法探讨其他民族音阶问题。他从协和度以及简比音程的关系入手，提出比大、小全音（9∶8、10∶9）关系更简单的两种音程 7∶6（267 音分）、8∶7（231 音分）是构成斯连德若音阶的重要结构因素，第 7 谐音是论证斯连德若音阶的重要基础，推导出一个斯连德若音阶的数理模式：3/2（纯五度）=7/6（斯连德若小三度）×8/7（斯连德若大二度）×9/8（大全音）。

在本书下编第四章讨论有关阿拉伯“中立音”律制研究时提到的法拉比、伊本·西那提出了“11 倍”与“13 分”的设定，是中古阿拉伯理论家的独特贡献，我们今天要继承并发展的是：对于“11 分、11 倍”与“13 分、13 倍”生律法的全面系统研究。挖掘出两仪生成带来的功能多义性，即阴仪派生下属功能；阳仪派生属功能。

“17 分、17 倍”与“19 分、19 倍”的成双生律，为我们找到了减和弦和增和弦功能

多义性的解释途径。虽然在已经正式发表的论著中还没有发现上述原理的系统阐发，但在1979年召开的全国和声学学术报告会上，赵宋光先生提交的论文之二《关于减七、增六和弦的功能的争议》，对“17分、17倍”生律法与减七和弦功能两可的相关性作了详细的阐述，但该报告会的论文汇编并非正式出版物。在正式出版的刊物上发表的有关论文有：

（1）赵宋光《数在音乐表现手段中的意义》（载《美学》第五辑1983年）；

（2）刘彤文《增六和弦用法的理论辨析》（载《中央音乐学院学报》2004年第3期）。

欧洲三百年的音乐实践中也早就运用了包含这种生律法的和弦结构，因为这些生律法所产生的音程关系与平均律的半音、全音极其近似，人们很容易用平均律来模拟、仿制，因而忽略了这一律学史上的理论成就。令人意外的是，早在二千多年前的淮南律数中就已透露出它们的理性表述。

最后的话：学科发展的未来走向

从上述对律学学科的概括总结，我们可以看到，从方法体系的建立、各种律制的形成、历史发展及现代研究，中华民族拥有一部悠久而持续发展的律学史，留下了丰富的律学文献，几乎少有哪个国家或民族能够与之比肩。但由于在奴隶制、封建制漫长时期中，迷信观念与律学的数理科学内容长久混杂，对于音律的自然律数研究总被一些伪学术附会于天文历数，在近现代更是由于被误解为封建迷信和神秘主义而被民主革命及新学冲刷，几乎成为绝学。很少有人认为不懂律学是一个知识缺陷。与此并列，南亚、西亚和欧洲也拥有丰富的律学典籍，但也鲜为当代音乐家所知。

当代音乐教育在欧洲音乐学观念影响下散布了对律学的深重误会。随着新世纪的到来，这误会的迷雾必将渐渐消散。有能力进行律学研究的中华音乐学界群体对驱散这迷雾负有不可推卸的历史责任。律学学科继续发展和当前动势，可概括为如下七方面：

1．琴律钟律研究

对七弦琴艺术宝库所保存的大量乐谱与文论进行律学研究，以其成果对出土编钟铭文进行律学解读，从而对钟律琴律互为表里的逻辑结构予以科学阐明，是继承中华文化遗产珍宝这一壮阔思潮的有机组成部分。

2．以律学研究支持旋律学学科建设

旋律学学科建设是对欧洲东传的作曲技术理论课程网络缺漏的重要弥补。旋律学学科建设若要立足于科学规范的基地上不遭挫败，不可缺少律学研究成果的支持。

3．以律学研究排解和声学的功能理论研究长期面临的难题与困惑

和声学的功能理论研究长期以来遭遇了许多意见分歧与逻辑矛盾，且因其旷日持久的难解困惑而陷入致命的危机。要有效地从危机中拯救和声学学科的命运，不能不倚仗律学研究的科学成果。

4．为世界民族音乐学研究的纵深推进提供强劲的钻杆

世界民族音乐学所积累的浩瀚采访资料向研究者提出大量难懂的音律之谜。要使世界多元音乐文化的珍贵遗产普遍地得到继承，各自获得应有的地位，必须以揭开这些谜底为前提。在这一努力中，需要律学研究科学方法的支援。

5. 开设律学课程

在音乐学院、艺术学院、师范学院、教育学院、音乐中专的基础课程中，长期以来的律学匮乏亟待补足，编写相关的教科书是律学研究者的职责。律学课程的教材中，应包括世界各国律学研究历史成果的系统化梳理介绍。

6. 充实基础乐理教材

欧洲引入的传统基础乐理课程对音律数理的讲解粗拙不明，使学生一知半解。这一现状的扭转要靠律学研究者对基础乐理教材的有关部分做精心改写。

7. 为音乐表演艺术提供参照

声乐表演艺术和器乐表演艺术在实践与教学过程中遇到大量和谐问题和音准问题，因缺乏科学准则而使难题无法解决的状况由来已久。律学研究者有责任为之提供科学的分析方法，帮助音乐表演艺术家掌握可靠的思维工具。

由于具有悠久深厚的历史传统和20世纪积累的领先成果，律学研究队伍的组建在当代中国是有优越条件的。每一位有志于为上述历史使命做出贡献的音乐学者都有机会成为这队伍中的一员。

附　录

附录一　对钱乐之三百六十律的清理及补正

在清理《隋书·律历志》中记载的钱乐之三百六十律这批数据时，我们运用逻辑表格来展示，共设计了三类表格。第一类表格是关于钱乐之三分损益三百六十律的内容；第二类是用三倍反生法生三百零六律，对钱乐之三百六十律进行补正，完成纯八度内的完全均匀划分；第三类表格是根据钱乐之以十二律名而统领的律部，将三分损益相生三百六十律和三倍反生三百零六律整合。读表顺序为：

第一类，以天干序号排列的6张表，每表阅读方法为从左下角开始，从下往上，每行由左至右；

第二类，以地支序号排列的6张表，每表阅读方法为从右上角开始，从上往下，每行由右至左；

第三类，12部共53个表，每页一部，每部表格的排列从左下至左上接右下至右上，这样的排列可以清晰地反映出音律之间的严密逻辑关系。

一、三分损益相生359次得360律（钱乐之三百六十律）

以三分损益法生律，每生52次得53律为一个单元，每53次生律产生一个“京房微差”，生至第359次，黄钟与黄钟半律之间被分割为306个“京房微差”和53个半份“京房微差”。以下共有6批53律，至第7批仅有41律。

甲，第一批53律

每12次生律就出现一个“古代音差”，在生律序号为12、24、36、48的律位上，都进行等音转换。从黄钟律出发，生律序号为0。

校正值	+.47	+.48	+.49	+.50	+.51		
生律序号	48 质未	49 否与	50 刑晋	51 夷汙	52 依行		
校正值		+.42	+.43	+.44	+.45	+.46	
生律序号		43 少出	44 分积	45 争南	46 期保	47 物应	
校正值	+.35	+.36	+.37	+.38	+.39	+.40	+.41
生律序号	36 分动	37 归嘉	38 随期	39 未印	40 刑始	41 迟时	42 制时
校正值		+.30	+.31	+.32	+.33	+.34	
生律序号		31 凌阴	32 去南	33 佚喜	34 邻齐	35 内贡	
校正值	+.23	+.24	+.25	+.26	+.27	+.28	+.29
生律序号	24 丙盛	25 安度	26 屈齐	27 归期	28 路时	29 未育	30 离躬
校正值		+.19	+.20	+.21	+.22	+.22	
生律序号		19 分否	20 鲜刑	21 开时	22 闭奄	23 南中	
校正值	+.12	+.13	+.14	+.15	+.16	+.17	+.18
生律序号	12 执始	13 去灭	14 时息	15 结躬	16 变虞	17 迟内	18 盛变
校正值		+.07	+.08	+.09	+.10	+.11	
生律序号		7 大吕	8 夷则	9 夹钟	10 无射	11 仲吕	
校正值		+.01	+.02	+.03	+.04	+.05	+.06
生律序号	0 黄钟	1 林钟	2 太簇	3 南吕	4 姑洗	5 应钟	6 蕤宾

在这个表中，第22号、23号相邻两律出现了相同的校正值，这是由于小数四舍五入的原因。我们依据的是7位小数的较精确的数值，校正值只取两位小数，第三位小数四舍五入。因此有时可能相邻的两个音符会具有相同的校正值，实际上，从七位小数来看，两者是不同。以下情况相同。

乙，第二批53律

当第一批53次生律至第53次，得到一个“京房微差”时，做等音转换。在第65、77、89、101次律位都做等音转换。

校正值	+.49	+.50	+.51	+.52	+.53		
生律序号	101 倭昧	102 景口	103 辨秩	104 均义	105 少选		
校正值		+.44	+.45	+.46	+.47	+.48	
生律序号		96 阿衡	97 孔脩	98 旭旦	99 延年	100 戒彝	
校正值	+.37	+.38	+.39	+.40	+.41	+.42	+.43
生律序号	89 生气	90 美音	91 龙跃	92 质随	93 方齐	94 方制	95 瑞通
校正值		+.32	+.33	+.34	+.35	+.36	
生律序号		84 侣阳	85 阳消	86 幹党	87 轨众	88 硃草	
校正值	+.25	+.26	+.27	+.28	+.29	+.30	+.31
生律序号	77 滋萌	78 德均	79 扶弱	80 中德	81 日旅	82 万机	83 安壮
校正值		+.20	+.21	+.22	+.23	+.24	
生律序号		72 又繁	73 贞剋	74 震德	75 降娄	76 离春	
校正值	+.14	+.15	+.15	+.16	+.17	+.18	+.19
生律序号	65 握鉴	66 华销	67 达生	68 肥遁	69 擢颖	70 无为	71 宾安
校正值		+.09	+.10	+.11	+.12	+.13	
生律序号		60 荄动	61 升商	62 明庶	63 思冲	64 硃明	
校正值	+.02	+.03	+.04	+.05	+.06	+.07	+.08
生律序号	53 色育	54 谦侍	55 未知	56 白吕	57 南授	58 分焉	59 南事

从色育出发，生律序号为53；第66、67号相邻两律的校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

丙，第三批53律

第二批53次生律至第106次，又高出一个“京房微差”，做等音转换。在第118、130、142、154次律位上都做等音转换。

校正值	+.51	+.52	+.53	+.53	+.54		
生律序号	154 逎建	155 曜井	156 东作	157 悦使	158 道从		
校正值		+.46	+.47	+.48	+.49	+.50	
生律序号		149 同云	150 九德	151 晨朝	152 秋深	153 荒落	
校正值	+.39	+.40	+.41	+.42	+.43	+.44	+.45
生律序号	142 云繁	143 温风	144 勾芒	145 分满	146 物华	147 无休	148 鹑火
校正值		+.34	+.35	+.36	+.37	+.38	
生律序号		137 识沈	138 柔辛	139 四隙	140 大蓄	141 含辉	
校正值	+.27	+.28	+.29	+.30	+.31	+.32	+.33
生律序号	130 光被	131 无蹇	132 承齐	133 王猷	134 实沈	135 万寿	136 崇明
校正值		+.22	+.23	+.24	+.25	+.26	
生律序号		125 唯微	126 金天	127 乘条	128 藏邃	129 率农	
校正值	+.15	+.16	+.17	+.18	+.19	+.20	+.21
生律序号	118 持枢	119 朋庆	120 匏奏	121 赢中	122 嘉气	123 而乂	124 怀远
校正值		+.10	+.11	+.12	+.13	+.14	
生律序号		113 始赞	114 清爽	115 协侣	116 怀谦	117 启运	
校正值	+.04	+.05	+.06	+.07	+.08	+.09	+.09
生律序号	106 含微	107 崇德	108 其已	109 捐秀	110 怀来	111 祖微	112 谧静

从含微出发，生律序号为106；第111、112号相邻两律校正值相同，第156、157号相邻两律校正值也相同，也是第三位小数四舍五入所致。

丁，第四批 53 律

第三批 53 次生律至第 159 次，又高出一个“京房微差”，做等音转换。在第 171、183、195、207 次律位上都做等音转换。

校正值	+.52	+.53	+.54	+.55	+.56		
生律序号	207 玄中	208 日焕	209 赞扬	210 亡劳	211 硃藪		
校正值		+.47	+.48	+.49	+.50	+.51	
生律序号		202 承明	203 咸蒧	204 生遂	205 野色	206 贞轸	
校正值	+.41	+.42	+.43	+.44	+.45	+.45	+.46
生律序号	195 郁湮	196 候节	197 调序	198 道心	199 革黄	200 九野	201 乂次
校正值		+.36	+.37	+.38	+.39	+.40	
生律序号		190 缉熙	191 延乙	192 种生	193 啬敛	194 屈铁	
校正值	+.29	+.30	+.31	+.32	+.33	+.34	+.35
生律序号	183 咸亨	184 礼溢	185 动植	186 允塞	187 炎风	188 无疆	189 远眺
校正值		+.24	+.25	+.26	+.27	+.28	
生律序号		178 弃望	179 刘狝	180 芬芳	181 日在	182 有程	
校正值	+.17	+.18	+.19	+.20	+.21	+.22	+.23
生律序号	171 黄中	172 云布	173 初角	174 晟阴	175 始升	176 姑射	177 声暨
校正值		+.12	+.13	+.14	+.15	+.16	
生律序号		166 大有	167 气精	168 阴赞	169 恭俭	170 景风	
校正值	+.05	+.06	+.07	+.08	+.09	+.10	+.11
生律序号	159 帝德	160 循道	161 义建	162 敦实	163 考神	164 据始	165 则选

从帝德出发，生律序号为 159；第 199、200 号两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

戊，第五批53律

第四批53次生律至第212次，又高出一个“京房微差”，做等音转换。在第224、236、248、260次律位上都做等音转换。

校正值	+.54	+.55	+.56	+.57	+.58		
生律序号	260 玉烛	261 重轮	262 显滞	263 九有	264 扬庭		
校正值		+.49	+.50	+.51	+.52	+.53	
生律序号		255 善述	256 金惟	257 群分	258 玄月	259 天庭	
校正值	+.42	+.43	+.44	+.45	+.46	+.47	+.48
生律序号	248 升引	249 蒉华	250 青要	251 贞坚	252 茂实	253 八荒	254 高焰
校正值		+.38	+.39	+.39	+.40	+.41	
生律序号		243 知道	244 和庚	245 恣性	246 下济	247 曜畤	
校正值	+.31	+.32	+.33	+.34	+.35	+.36	+.37
生律序号	236 乃文	237 智深	238 咸擢	239 蓐收	240 首节	241 地久	242 升中
校正值		+.26	+.27	+.28	+.29	+.30	
生律序号		231 庶几	232 会道	233 散朗	234 旋春	235 南讹	
校正值	+.19	+.20	+.21	+.22	+.23	+.24	+.25
生律序号	224 通圣	225 均任	226 少阳	227 抗节	228 卿云	229 凝晦	230 轨同
校正值		+.14	+.15	+.16	+.17	+.18	
生律序号		219 坤元	220 阴德	221 风从	222 休老	223 初缓	
校正值	+.07	+.08	+.09	+.10	+.11	+.12	+.13
生律序号	212 广运	213 方壮	214 亭毒	215 素风	216 方显	217 功成	218 布萼

从广运出发，生律顺序为212；第244、245号两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

己，第六批53律

第五批53次生律至第265次，又高出一个“京房微差”，做等音转换。在第277、289、301、313次律位上各做等音转换。

校正值	+.56	+.57	+.58	+.59	+.60		
生律序号	313 调风	314 财华	315 俶落	316 光赉	317 含贞	–	–
校正值		+.51	+.52	+.53	+.54	+.55	
生律序号		308 休光	309 俾乂	310 洁新	311 澄天	312 祚周	
校正值	+.44	+.45	+.46	+.47	+.48	+.49	+.50
生律序号	301 屯结	302 绣岭	303 结萼	304 蓄止	305 登明	306 亿兆	307 其煌
校正值		+.39	+.40	+.41	+.42	+.43	
生律序号		296 适时	297 靡卉	298 逍遥	299 息肩	300 已气	
校正值	+.32	+.33	+.34	+.35	+.36	+.37	+.38
生律序号	289 乃圣	290 任肃	291 兼山	292 搏辔	293 柔条	294 天长	295 凤翥
校正值		+.28	+.29	+.30	+.31	+.32	
生律序号		284 执义	285 归仁	286 淑气	287 阉藏	288 敬致	
校正值	+.21	+.22	+.23	+.24	+.25	+.26	+.27
生律序号	277 潜升	278 仰成	279 柔桡	280 威远	281 媚岭	282 动寂	283 海水
校正值		+.16	+.17	+.18	+.19	+.20	
生律序号		272 辅时	273 白藏	274 布政	275 恤农	276 羽物	
校正值	+.09	+.10	+.11	+.12	+.13	+.14	+.15
生律序号	265 下济	266 阴升	267 条风	268 劲物	269 携角	270 乂定	271 满嬴

从下济出发，生律顺序为265；第288、289号两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

庚，第七批 41 律①

第六批 53 次生律至第 318 次，又高出一个“京房微差”，做等音转换。在第 330、342、354 次律位上各做等音转换。

	完← — — — — — — — — — — — — — — — →完						
校正值	+.46	+.47	+.48	+.49	+.50	+.51	
生律序号	354 开元	355 物无	356 延敷	357 归藏	358 壮进	359 安运	
校正值		+.41	+.42	+.43	+.44	+.45	
生律序号		349 权变	350 蕤晋	351 仁威	352 无边	353 清和	
校正值	+.34	+.35	+.36	+.37	+.38	+.39	+.40
生律序号	342 微阳	343 纯恪	344 止速	345 摇落	346 方结	347 修复	348 朝阳
校正值		+.29	+.30	+.31	+.32	+.33	
生律序号		337 秉强	338 阴侣	339 风驰	340 明奎	341 相趣	
校正值	+.23	+.24	+.25	+.26	+.26	+.27	+.28
生律序号	330 殷普	331 宽中	332 商音	333 有截	334 疏道	335 应徵	336 息沴
校正值		+.18	+.19	+.20	+.21	+.22	
生律序号		325 匡弼	326 御叙	327 万化	328 销祥	329 斯奋	
校正值	+.11	+.12	+.13	+.14	+.15	+.16	+.17
生律序号	318 尅终	319 靡慝	320 凑始	321 酋稔	322 洗陈	323 静谧	324 潜动

从尅终出发，生律顺序为 318；第 333、334 号两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

① 按照钱乐之的记述，最后一批 41 律。但这第 42 个律（生律序号为 359）安运是多余的，钱乐之把它归入应钟一部，而实际上却高于黄钟半律。详见《十二多律统领十二个生律群表 53〈41〉迟时↔〈0〉黄钟半律》，第 242 页。

二、三倍反生法（三倍）得反向306律

以三倍反生相生306次，得到反方向306律，将306个“京房微差”划分为“半京甲”和“半京乙”。仍以53律为一个单元建立表格，每相生12次，出现一个“古代音差”，做一次等音转换；每相生53次，出现一个“京房微差”，也做一次等音转换。

子，第一批52律①

校正值	-.06	-.05	-.04	-.03	-.02	-.01	0
生律序号	-6 反生蕤宾	-5 反生大吕	-4 反生夷则	-3 反生夹钟	-2 反生无射	-1 反生仲吕	0 黄钟半律
校正值		-.11	-.10	-.09	-.08	-.07	
生律序号		-11 反生林钟	-10 反生太簇	-9 反生南吕	-8 反生姑洗	-7 反生应钟	
校正值	-.18	-.17	-.16	-.15	-.14	-.13	-.12
生律序号	-18 后敬致	-17 后乃圣	-16 后任肃	-15 后兼山	-14 后撙辔	-13 后柔条	-12 后天长
校正值		-.22	-.22	-.21	-.20	-.19	
生律序号		-23 后海水	-22 后执义	-21 后归仁	-20 后淑气	-19 后阉藏	
校正值	-.29	-.28	-.27	-.26	-.25	-.24	-.23
生律序号	-30 后羽物	-29 后潜升	-28 后仰成	-27 后柔桡	-26 后威远	-25 后媚岭	-24 后动寂
校正值		-.34	-.33	-.32	-.31	-.30	
生律序号		-35 后满赢	-34 后辅时	-33 后白藏	-32 后布政	-31 后恤农	
校正值	-.41	-.40	-.39	-.38	-.37	-.36	-.35
生律序号	-42 后扬庭	-41 后下济	-40 后阴升	-39 后条风	-38 后劲物	-37 后携角	-36 后义定
校正值		.-46	-.45	-.44	-.43	-.42	
生律序号		-47 后天庭	-46 后玉烛	-45 后重轮	-44 后显滞	-43 后九有	
校正值			-.51	-.50	-.49	-.48	-.47
生律序号			-52 后高焰	-51 后善述	-50 后金惟	-49 后群分	-48 后玄月

① 第一批52律，加上出发律黄钟半律，共53律。但出发律不属于反生所得的范围，故应扣除。

每产生一个“古代音差”，进行一次等音转换。故第－12、－24、－36、－48 号各音律做等音转换；所有反向生律所得的音律命名办法有两种：第一，负 1 至负 11，在人们熟知的古代律名之前添加“反生”二字；第二，从负 12 起以后各律，在京房、钱乐之律名之前添加“后”字。例如，反生第 53 次所得律（－53 号），根据钱乐之第 253 号律名“八荒”而命名为“后八荒”，两者序号的绝对值相加必为 306。－22、－23 号相邻两律校正值相同。

丑，第二批 53 律

校正值	－.08	－.07	－.06	－.05	－.04	－.03	－0.2
生律序号	－59 后曜晦	－58 后升引	－57 后蓂华	－56 后青要	－55 后贞坚	－54 后茂实	－53 后八荒
校正值		－.13	－.12	－.11	－.10	－.09	
生律序号		－64 后升中	－63 后知道	－62 后和庚	－61 后恣性	－60 后下济	
校正值	－.19	－.18	－.17	－.16	－.15	－.14	－.14
生律序号	－71 后南讹	－70 后乃文	－69 后智深	－68 后咸擢	－67 后蓐收	－66 后首节	－65 后地久
校正值		－.24	－.23	－.22	－.21	－.20	
生律序号		－76 后轨同	－75 后庶几	－74 后会道	－73 后散朗	－72 后旋春	
校正值	－.31	－.30	－.29	－.28	－.27	－.26	－.25
生律序号	－83 后初缓	－82 后通圣	－81 后均任	－80 后少阳	－79 后抗节	－78 后卿云	－77 后凝晦
校正值		－.36	－.35	－.34	－.33	－.32	
生律序号		－88 后布萼	－87 后坤元	－86 后阴德	－85 后风从	－84 后休老	
校正值	－.43	－.42	－.41	－.40	－.39	－.38	－.37
生律序号	－95 后硃黻	－94 后广运	－93 后方壮	－92 后亭毒	－91 后素风	－90 后方显	－89 后功成
校正值		－4.8	－.47	－.46	－.45	－.44	
生律序号		－100 后贞轸	－99 后玄中	－98 后日焕	－97 后赞扬	－96 后亡劳	
校正值			－.53	－.52	－.51	－.50	－.49
生律序号			－105 后乂次	－104 后承明	－103 后咸悫	－102 后生遂	－101 后野色

每生 53 律，产生一个“京房微差”，进行一次等音转换。－65、－66 号相邻两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

寅，第三批53律

校正值	－.09	－.09	－.08	－.07	－.06	－.05	－.04
生律序号	－112 后屈轶	－111 后郁湮	－110 后候节	－109 后调序	－108 后道心	－107 后革黄	－106 后九野
校正值		－.14	－.13	－.12	－.11	－.10	
生律序号		－117 后远眺	－116 后缉熙	－115 后延乙	－114 后种生	－113 后啬敛	
校正值	－.21	－.20	－.19	－.18	－.17	－.16	－.15
生律序号	－124 后有程	－123 后咸亨	－122 后礼溢	－121 后动植	－120 后允塞	119 后炎风	－118 后无疆
校正值		－.26	－.25	－.24	－.23	－.22	
生律序号		－129 后声暨	－128 后弃望	－127 后刘弥	－126 后芬芳	－125 后日在	
校正值	－.33	－.32	－.31	－.30	－.29	－.28	－.27
生律序号	－136 后景风	－135 后黄中	－134 后云布	－133 后初角	－132 后晟阴	－131 后始升	－130 后姑射
校正值		－.38	－.37	－.36	－.35	－.34	
生律序号		－141 后则选	－140 后大有	－139 后气精	－138 后阴赞	－137 后恭俭	
校正值	－.45	－.44	－.43	－.42	－.41	－.40	－.39
生律序号	－148 后道从	－147 后帝德	－146 后循道	－145 后义建	－144 后敦实	－143 后考神	－142 后据始
校正值		－.50	－.49	－.48	－.47	.－46	
生律序号		－153 后荒落	－152 后遒建	－151 后曜井	－150 后东作	－149 后悦使	
校正值			－.54	－.53	－.52	－.52	－.51
生律序号			－158 后鹑火	－157 后同云	－156 后九德	－155 后晨朝	－154 后秋深

每生53律，产生一个“京房微差”，进行一次等音转换。第－118、－130、－142、－154号各律位上产生“古代音差”而做等音转换。－111、－112号相邻两律校正值相同、－155、－156号相邻两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

卯，第四批53律

校正值	-.11	-.10	-.09	-.08	-.07	-.06	-.05
生律序号	-165 后含辉	-164 后云繁	-163 后温风	-162 后勾芒	-161 后分满	-160 后物华	-159 后无休
校正值		-.16	-.15	-.14	-.13	-.12	
生律序号		-170 后崇明	-169 后识沈	-168 后柔辛	-167 后四隙	-166 后大蓄	
校正值	-.23	-.22	-.21	-.20	-.19	-.18	-.17
生律序号	-177 后率衣	-176 后光被	-175 后无塞	-174 后承齐	-173 后王猷	-172 后实沈	-171 后万寿
校正值		-.28	-.27	-.26	-.25	-.24	
生律序号		-182 后怀远	-181 后唯微	-180 后金天	-179 后乘条	-178 后藏邃	
校正值	-.35	-.34	-.33	-.32	-.31	-.30	-.29
生律序号	-189 后启运	-188 后持枢	-187 后朋庆	-186 后匏奏	-185 后赢中	-184 后嘉气	-183 后而乂
校正值		-.40	-.39	-.38	-.37	-.36	
生律序号		-194 后谧静	-193 后始赞	-192 后清爽	-191 后协侣	-190 后怀谦	
校正值	.-46	-.45	-.45	-.44	-.43	-.42	-.41
生律序号	-201 后少选	-200 后含微	-199 后崇德	-198 后其已	-197 后捐秀	-196 后怀来	-195 后祖微
校正值		-.51	-.50	-.49	-.48	-.47	
生律序号		-206 后戒彝	-205 后偻昧	-204 后景口	-203 后辨秩	-202 后均义	
校正值			-.56	-.55	-.54	-.53	-.52
生律序号			-211 后瑞通	-210 后阿衡	-209 后孔脩	-208 后旭旦	-207 后延年

每生53律，产生一个“京房微差”，进行一次等音转换。在第－171、－183、－195、－207各律位上因为产生“古代音差”而做等音转换。－199、－200号相邻两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

辰，第五批 53 律

校正值	-.13	-.12	-.11	-.10	-.09	-.08	-.07
生律序号	-218 后硃草	-217 后生气	-216 后美音	-215 后龙跃	-214 后质随	-213 后方齐	-212 后方制
校正值		-.18	-.17	-.16	-.15	-.14	
生律序号		-223 后安壮	-222 后侣阳	-221 后阳消	-220 后幹党	-219 后轨众	
校正值	-.25	-.24	-.23	-.22	-.21	-.20	-.19
生律序号	-230 后离春	-229 后滋萌	-228 后德均	-227 后扶弱	-226 后中德	-225 后日旅	-224 后万机
校正值		-.30	-.29	-.28	-.27	-.26	
生律序号		-235 后宾安	-234 后又繁	-233 后贞剋	-232 后震德	-231 后降娄	
校正值	-.37	-.36	-.35	-.34	-.33	-.32	-.31
生律序号	-242 后硃明	-241 后握鉴	-240 后华销	-239 后达生	-238 后肥遁	-237 后擢颖	-236 后无为
校正值		-.41	-.40	-.40	-.39	-.38	
生律序号		-247 后南事	-246 后荄动	-245 后升商	-244 后明庶	-243 后思冲	
校正值	-.48	-.47	-.46	-.45	-.44	-.43	-.42
生律序号	-254 后依行	-253 后色育	-252 后谦侍	-251 后未知	-250 后白吕	-249 后南授	-248 后分焉
校正值		-.53	-.52	-.51	-.50	-.49	
生律序号		-259 后物应	-258 后质未	-257 后否与	-256 后刑晋	-255 后夷汗	
校正值			-.58	-.57	-.56	-.55	-.54
生律序号			-264 后制时	-263 后少出	-262 后分积	-261 后争南	-260 后期保

每生 53 律，产生一个“京房微差”，进行一次等音转换。第 -224、-236、-248、-260 各律位上产生一个“古代音差”，做等音转换。-245、246 号相邻两律音律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

巳，第六批42律

校正值	-.15	-.14	-.13	-.12	-.11	-.10	-.09
生律序号	-271后内贞	-270后分动	-269后归嘉	-268后随期	-267后未卯	-266后刑始	-265后迟时
校正值		-.20	-.19	-.18	-.17	-.16	
生律序号		-276后离躬	-275后凌阴	-274后去南	-273后佚喜	-272后邻齐	
校正值	-.27	-.26	-.25	-.24	-.23	-.22	-.21
生律序号	-283后南中	-282后丙盛	-281后安度	-280后屈齐	-279后归期	-278后路时	-277后未育
校正值		-.32	-.31	-.30	-.29	-.28	
生律序号		-288后盛变	-287后分否	-286后鲜刑	-285后开时	-284后闭奄	
校正值	-.38	-.37	-.36	-.35	-.34	-.33	-.32
生律序号	-295后仲吕	-294后执始	-293后去灭	-292后时息	-291后结躬	-290后变虞	-289后迟内
校正值		-.43	-.42	-.41	-.40	-.39	
生律序号		-300后蕤宾	-299后大吕	-298后夷则	-297后夹钟	-296后无射	
校正值		-.49	-.48	-.47	-.46	-.45	-.44
生律序号		-306后黄钟	-305后林钟	-304后太簇	-303后南吕	-302后姑洗	-301后应钟

相生42律，产生一个“京房微差”，进行一次等音转换。第-277、-289、-301各律位上都做等音转换。第-306律为“后黄钟”。-288、-289相邻两律校正值相同，也是第三位小数四舍五入所致。

三、十二律统领十二个生律群

1. 黄钟部　表1－5黄钟一部，含正、反相生六十三律，共形成63个“半京”区间。

183	咸亨	$3^{-183}\cdot 2^{290}$	0.2887884
－176	后光被	$3^{176}\cdot 2^{-279}$	0.2796352
130	光被	$3^{-130}\cdot 2^{206}$	0.270724
－229	后滋萌	$3^{229}\cdot 2^{-363}$	0.2615708
77	滋萌	$3^{-77}\cdot 2^{122}$	0.2526596
－282	后丙盛	$3^{282}\cdot 2^{-447}$	0.2435064
24	丙盛	$3^{-24}\cdot 2^{38}$	0.2345952
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表2　含13个“半京”(12)执始⟷(24)丙盛/景盛

24	丙盛(景盛)	$3^{-24}\cdot 2^{38}$	0.2345952
330	殷普	$3^{-330}\cdot 2^{523}$	0.225684
－29	后潜升	$3^{29}\cdot 2^{-46}$	0.2165308
277	潜升	$3^{-277}\cdot 2^{439}$	0.2076196
－82	后通圣	$3^{82}\cdot 2^{-130}$	0.1984664
224	通圣	$3^{-224}\cdot 2^{355}$	0.1895552
－135	后黄中	$3^{135}\cdot 2^{-214}$	0.180402
171	黄中	$3^{-171}\cdot 2^{271}$	0.1714908
－188	后持枢	$3^{188}\cdot 2^{-298}$	0.1623376
118	持枢	$3^{-118}\cdot 2^{187}$	0.1534264
－241	后握鉴	$3^{241}\cdot 2^{-382}$	0.1442732
65	握鉴	$3^{-65}\cdot 2^{103}$	0.135362
－294	后执始	$3^{294}\cdot 2^{-466}$	0.1262088
12	执始	$3^{-12}\cdot 2^{19}$	0.1172976
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表1　含13个“半京”(0)黄钟⟷(12)执始

12	执始	$3^{-12}\cdot 2^{19}$	0.1172976
318	尅终	$3^{-318}\cdot 2^{504}$	0.1083864
－41	后下济	$3^{41}\cdot 2^{-65}$	0.0992332
265	下济	$3^{-265}\cdot 2^{420}$	0.090322
－94	后广运	$3^{94}\cdot 2^{-149}$	0.0811688
212	广运	$3^{-212}\cdot 2^{336}$	0.0722576
－147	后帝德	$3^{147}\cdot 2^{-233}$	0.0631044
159	帝德	$3^{-159}\cdot 2^{252}$	0.0541932
－200	后含微	$3^{200}\cdot 2^{-317}$	0.04504
106	含微	$3^{-106}\cdot 2^{168}$	0.0361288
－253	后色育	$3^{253}\cdot 2^{-401}$	0.0269756
53	色育(包育)	$3^{-53}\cdot 2^{84}$	0.0180644
－306	后黄钟	$3^{306}\cdot 2^{-485}$	0.0089112
0	黄钟	$3^{0}\cdot 2^{0}$	0
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表5　含11个“半京”(48)质未⟷(7)大吕

7	大吕	$3^{7}\cdot 2^{-11}$	0.5684236
313	调风	$3^{-313}\cdot 2^{496}$	0.5595124
－46	后玉烛	$3^{46}\cdot 2^{-73}$	0.5503592
260	玉烛	$3^{-260}\cdot 2^{412}$	0.541448
－99	后玄中	$3^{99}\cdot 2^{-157}$	0.5322948
207	玄中	$3^{-207}\cdot 2^{328}$	0.5233836
－152	后逋建	$3^{152}\cdot 2^{-241}$	0.5142304
154	逋建	$3^{-154}\cdot 2^{244}$	0.5053192
－205	后僾昧	$3^{205}\cdot 2^{-325}$	0.496166
101	僾昧	$3^{-101}\cdot 2^{160}$	0.4872548
－258	后质未	$3^{258}\cdot 2^{-409}$	0.4781016
48	质未	$3^{-48}\cdot 2^{76}$	0.4691904
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表4　含13个“半京”(36)分动⟷(48)质未

48	质未	$3^{-48}\cdot 2^{76}$	0.4691904
354	开元	$3^{-354}\cdot 2^{561}$	0.4602792
－5	反生大吕	$3^{5}\cdot 2^{-8}$	0.451126
301	屯结	$3^{-301}\cdot 2^{477}$	0.4422148
－58	后升引	$3^{58}\cdot 2^{-92}$	0.4330616
248	升引	$3^{-248}\cdot 2^{393}$	0.4241504
－111	后郁湮	$3^{111}\cdot 2^{-176}$	0.4149972
195	郁湮	$3^{-195}\cdot 2^{309}$	0.406086
－164	后云繁	$3^{164}\cdot 2^{-260}$	0.3969328
142	云繁	$3^{-142}\cdot 2^{225}$	0.3880216
－217	后生气	$3^{217}\cdot 2^{-344}$	0.3788684
89	生气	$3^{-89}\cdot 2^{141}$	0.3699572
－270	后分动	$3^{270}\cdot 2^{-428}$	0.360804
36	分动	$3^{-36}\cdot 2^{57}$	0.3518928
生律编号	律名	相对波长	相对音高

表3　含13个“半京”(24)丙盛/景盛⟷(36)分动

36	分动	$3^{-36}\cdot 2^{57}$	0.3518928
342	微阳	$3^{-342}\cdot 2^{542}$	0.3429816
－17	后乃圣	$3^{17}\cdot 2^{-27}$	0.3338284
289	乃圣	$3^{-289}\cdot 2^{458}$	0.3249172
－70	后乃文	$3^{70}\cdot 2^{-111}$	0.315764
236	乃文	$3^{-236}\cdot 2^{374}$	0.3068528
－123	后咸亨	$3^{123}\cdot 2^{-195}$	0.2976996

2. 大吕部　表 6 – 9 大吕一部，含正、反相生五十律，共形成 50 个“半京”区间。

表 7　含 13 个“半京”（19）分否⟷（31）凌阴

生律编号	律名	相对波长	相对音高
31	凌阴	$3^{31} \cdot 2^{-49}$	0.8030188
337	乘强	$3^{-337} \cdot 2^{534}$	0.7941076
–22	后执义	$3^{22} \cdot 2^{-35}$	0.7849544
284	执义	$3^{-284} \cdot 2^{450}$	0.7760432
–75	后庶几	$3^{75} \cdot 2^{-119}$	0.76689
231	庶几	$3^{-231} \cdot 2^{366}$	0.7579788
–128	后弃望	$3^{128} \cdot 2^{-203}$	0.7488256
178	弃望	$3^{-178} \cdot 2^{282}$	0.7399144
–181	后唯微	$3^{181} \cdot 2^{-287}$	0.7307612
125	唯微	$3^{-125} \cdot 2^{198}$	0.72185
–234	后又繁	$3^{234} \cdot 2^{-371}$	0.7126968
72	又繁	$3^{-72} \cdot 2^{114}$	0.7037856
–287	后分否	$3^{287} \cdot 2^{-455}$	0.6946324
19	分否	$3^{19} \cdot 2^{-30}$	0.6857212

表 9　含 11 个“半京”（43）少出⟷（2）太簇

生律编号	律名	相对波长	相对音高
2	太簇	$3^{-2} \cdot 2^{3}$	1.0195496
308	休光	$3^{-308} \cdot 2^{488}$	1.0106384
–51	后善述	$3^{51} \cdot 2^{-81}$	1.0014852
255	善述	$3^{-255} \cdot 2^{404}$	0.992574
–104	后承明	$3^{104} \cdot 2^{-165}$	0.9834208
202	承明	$3^{-202} \cdot 2^{320}$	0.9745096
–157	后同云	$3^{157} \cdot 2^{-249}$	0.9653564
149	同云	$3^{-149} \cdot 2^{236}$	0.9564452
–210	后阿衡	$3^{210} \cdot 2^{-333}$	0.947292
96	阿衡	$3^{-96} \cdot 2^{152}$	0.9383808
–263	后少出	$3^{263} \cdot 2^{-417}$	0.9292276
43	少出	$3^{43} \cdot 2^{-68}$	0.9203164

表 6　含 13 个“半京”（7）大吕⟷（19）分否

生律编号	律名	相对波长	相对音高
19	分否	$3^{19} \cdot 2^{-30}$	0.6857212
325	匡弼	$3^{-325} \cdot 2^{515}$	0.67681
–34	后辅时	$3^{34} \cdot 2^{-54}$	0.6676568
272	辅时	$3^{-272} \cdot 2^{431}$	0.6587456
–87	后坤元	$3^{87} \cdot 2^{-138}$	0.6495924
219	坤元	$3^{-219} \cdot 2^{347}$	0.6406812
–140	后大有	$3^{140} \cdot 2^{-222}$	0.631528
166	大有	$3^{-166} \cdot 2^{263}$	0.6226168
–193	后始赞	$3^{193} \cdot 2^{-306}$	0.6134636
113	始赞	$3^{-113} \cdot 2^{179}$	0.6045524
–246	后荄动	$3^{246} \cdot 2^{-390}$	0.5953992
60	荄动	$3^{-60} \cdot 2^{95}$	0.586488
–299	后大吕	$3^{299} \cdot 2^{-474}$	0.5773348
7	大吕	$3^{7} \cdot 2^{-11}$	0.5684236

表 8　含 13 个“半京”（31）凌阴⟷（43）少出

生律编号	律名	相对波长	相对音高
43	少出	$3^{43} \cdot 2^{-68}$	0.9203164
349	权变	$3^{-349} \cdot 2^{553}$	0.9114052
–10	反生太簇	$3^{10} \cdot 2^{-16}$	0.902252
296	适时	$3^{-296} \cdot 2^{469}$	0.8933408
–63	后知道	$3^{63} \cdot 2^{-100}$	0.8841876
243	知道	$3^{-243} \cdot 2^{385}$	0.8752764
–116	后缉熙	$3^{116} \cdot 2^{-184}$	0.8661232
190	缉熙	$3^{-190} \cdot 2^{301}$	0.857212
–169	后识沈	$3^{169} \cdot 2^{-268}$	0.8480588
137	识沈	$3^{-137} \cdot 2^{217}$	0.8391476
–222	后侣阳	$3^{222} \cdot 2^{-352}$	0.8299944
84	侣阳	$3^{-84} \cdot 2^{133}$	0.8210832
–275	后凌阴	$3^{275} \cdot 2^{-436}$	0.81193
31	凌阴	$3^{31} \cdot 2^{-49}$	0.8030188

3. 太簇部　表 10－14 太簇一部，含正、反相生六十三律，共形成 63 个“半京”区间。

生律编号	律名	相对波长	相对音高
185	动植	$3^{-185}\cdot 2^{293}$	1.308338
－174	后承齐	$3^{174}\cdot 2^{-276}$	1.2991848
132	承齐	$3^{-132}\cdot 2^{209}$	1.2902736
－227	后扶弱	$3^{227}\cdot 2^{-360}$	1.2811204
79	扶弱	$3^{-79}\cdot 2^{125}$	1.2722092
－280	后屈齐	$3^{280}\cdot 2^{-444}$	1.263056
26	屈齐	$3^{-26}\cdot 2^{41}$	1.2541448

表 11　含 13 个“半京”（14）时息⟷（26）屈齐

生律编号	律名	相对波长	相对音高
26	屈齐	$3^{-26}\cdot 2^{41}$	1.2541448
332	商音	$3^{-332}\cdot 2^{526}$	1.2452336
－27	后柔桡	$3^{27}\cdot 2^{-43}$	1.2360804
279	柔桡	$3^{-279}\cdot 2^{442}$	1.2271692
－80	后少阳	$3^{80}\cdot 2^{-127}$	1.218016
226	少阳	$3^{-226}\cdot 2^{358}$	1.2091048
－133	后初角	$3^{133}\cdot 2^{-211}$	1.1999516
173	初角	$3^{-173}\cdot 2^{274}$	1.1910404
－186	后匏奏	$3^{186}\cdot 2^{-295}$	1.1818872
120	匏奏	$3^{-120}\cdot 2^{190}$	1.172976
－239	后达生	$3^{239}\cdot 2^{-379}$	1.1638228
67	达生	$3^{-67}\cdot 2^{106}$	1.1549116
－292	后时息	$3^{292}\cdot 2^{-463}$	1.1457584
14	时息	$3^{-14}\cdot 2^{22}$	1.1368472

表 10　含 13 个“半京”（2）太簇⟷（14）时息

生律编号	律名	相对波长	相对音高
14	时息	$3^{-14}\cdot 2^{22}$	1.1368472
320	凑始	$3^{-320}\cdot 2^{507}$	1.127936
－39	后条风	$3^{39}\cdot 2^{-62}$	1.1187828
267	条风	$3^{-267}\cdot 2^{423}$	1.1098716
－92	后亭毒	$3^{92}\cdot 2^{-146}$	1.1007184
214	亭毒	$3^{-214}\cdot 2^{339}$	1.0918072
－145	后义建	$3^{145}\cdot 2^{-230}$	1.082654
161	义建	$3^{-161}\cdot 2^{255}$	1.0737428
－198	后其已	$3^{198}\cdot 2^{-314}$	1.0645896
108	其已	$3^{-108}\cdot 2^{171}$	1.0556784
－251	后未知	$3^{251}\cdot 2^{-398}$	1.0465252
55	未知	$3^{-55}\cdot 2^{87}$	1.037614
－304	后太簇	$3^{304}\cdot 2^{-482}$	1.0284608
2	太簇	$3^{-2}\cdot 2^{3}$	1.0195496

表 14　含 11 个“半京”（50）刑晋⟷（9）夹钟

生律编号	律名	相对波长	相对音高
9	夹钟	$3^{9}\cdot 2^{-14}$	1.5879732
315	俶落	$3^{-315}\cdot 2^{499}$	1.579062
－44	后显滞	$3^{44}\cdot 2^{-70}$	1.5699088
262	显滞	$3^{-262}\cdot 2^{415}$	1.5609976
－97	后赞扬	$3^{97}\cdot 2^{-154}$	1.5518444
209	赞扬	$3^{-209}\cdot 2^{331}$	1.5429332
－150	后东作	$3^{150}\cdot 2^{-238}$	1.53378
156	东作	$3^{-156}\cdot 2^{247}$	1.5248688
－203	后辨秩	$3^{203}\cdot 2^{-322}$	1.5157156
103	辨秩	$3^{-103}\cdot 2^{163}$	1.5068044
－256	后刑晋	$3^{256}\cdot 2^{-406}$	1.4976512
50	刑晋	$3^{50}\cdot 2^{-79}$	1.48874

表 13　含 13 个“半京”（38）随期⟷（50）刑晋

生律编号	律名	相对波长	相对音高
50	刑晋	$3^{50}\cdot 2^{-79}$	1.48874
356	延敷	$3^{-356}\cdot 2^{564}$	1.4798288
－3	反生夹钟	$3^{3}\cdot 2^{-5}$	1.4706756
303	结萼	$3^{-303}\cdot 2^{480}$	1.4617644
－56	后青要	$3^{56}\cdot 2^{-89}$	1.4526112
250	青要	$3^{-250}\cdot 2^{396}$	1.4437
－109	后调序	$3^{109}\cdot 2^{-173}$	1.4345468
197	调序	$3^{-197}\cdot 2^{312}$	1.4256356
－162	后勾芒	$3^{162}\cdot 2^{-257}$	1.4164824
144	勾芒	$3^{-144}\cdot 2^{228}$	1.4075712
－215	后龙跃	$3^{215}\cdot 2^{-341}$	1.398418
91	龙跃	$3^{-91}\cdot 2^{144}$	1.3895068
－268	后随期	$3^{268}\cdot 2^{-425}$	1.3803536
38	随期	$3^{38}\cdot 2^{-60}$	1.3714424

表 12　含 13 个“半京”（26）屈齐⟷（38）随期

生律编号	律名	相对波长	相对音高
38	随期	$3^{38}\cdot 2^{-60}$	1.3714424
344	止速	$3^{-344}\cdot 2^{545}$	1.3625312
－15	后兼山	$3^{15}\cdot 2^{-24}$	1.353378
291	兼山	$3^{-291}\cdot 2^{461}$	1.3444668
－68	后咸播	$3^{68}\cdot 2^{-108}$	1.3353136
238	咸播	$3^{-238}\cdot 2^{377}$	1.3264024
－121	后动植	$3^{121}\cdot 2^{-192}$	1.3172492

4. 夹钟部　表15－18夹钟一部，含正、反相生五十律，共形成50个“半京”区间。

表16　含13个“半京”(21)开时⟷(33)佚喜

生律编号	律名	相对波长	相对音高
33	佚喜	$3^{33}\cdot 2^{-52}$	1.8225684
339	风驰	$3^{-339}\cdot 2^{537}$	1.8136572
－20	后淑气	$3^{20}\cdot 2^{-32}$	1.804504
286	淑气	$3^{-286}\cdot 2^{453}$	1.7955928
－73	后散朗	$3^{73}\cdot 2^{-116}$	1.7864396
233	散朗	$3^{-233}\cdot 2^{369}$	1.7775284
－126	后芬芳	$3^{126}\cdot 2^{-200}$	1.7683752
180	芬芳	$3^{-180}\cdot 2^{285}$	1.759464
－179	后乘条	$3^{179}\cdot 2^{-284}$	1.7503108
127	乘条	$3^{-127}\cdot 2^{201}$	1.7413996
－232	后震德	$3^{232}\cdot 2^{-368}$	1.7322464
74	震德	$3^{-74}\cdot 2^{117}$	1.7233352
－285	后开时	$3^{285}\cdot 2^{-452}$	1.714182
21	开时	$3^{21}\cdot 2^{-33}$	1.7052708

表15　含13个“半京”(9)夹钟⟷(21)开时

生律编号	律名	相对波长	相对音高
21	开时	$3^{21}\cdot 2^{-33}$	1.7052708
327	万化	$3^{-327}\cdot 2^{518}$	1.6963596
－32	后布政	$3^{32}\cdot 2^{-51}$	1.6872064
274	布政	$3^{-274}\cdot 2^{434}$	1.6782952
－85	后风从	$3^{85}\cdot 2^{-135}$	1.669142
221	风从	$3^{-221}\cdot 2^{350}$	1.6602308
－138	后阴赞	$3^{138}\cdot 2^{-219}$	1.6510776
168	阴赞	$3^{-168}\cdot 2^{266}$	1.6421664
－191	后协侣	$3^{191}\cdot 2^{-303}$	1.6330132
115	协侣	$3^{-115}\cdot 2^{182}$	1.624102
－244	后明庶	$3^{244}\cdot 2^{-387}$	1.6149488
62	明庶	$3^{-62}\cdot 2^{98}$	1.6060376
－297	后夹钟	$3^{297}\cdot 2^{-471}$	1.5968844
9	夹钟	$3^{9}\cdot 2^{-14}$	1.5879732

表18　含11个“半京”(45)争南⟷(4)姑洗

生律编号	律名	相对波长	相对音高
4	姑洗	$3^{-4}\cdot 2^{6}$	2.0390992
310	洁新	$3^{-310}\cdot 2^{491}$	2.030188
－49	后群分	$3^{49}\cdot 2^{-78}$	2.0210348
257	群分	$3^{-257}\cdot 2^{407}$	2.0121236
－102	后生遂	$3^{102}\cdot 2^{-162}$	2.0029704
204	生遂	$3^{-204}\cdot 2^{323}$	1.9940592
－155	后晨朝	$3^{155}\cdot 2^{-246}$	1.984906
151	晨朝	$3^{-151}\cdot 2^{239}$	1.9759948
－208	后旭旦	$3^{208}\cdot 2^{-330}$	1.9668416
98	旭旦	$3^{-98}\cdot 2^{155}$	1.9579304
－261	后争南	$3^{261}\cdot 2^{-414}$	1.9487772
45	争南	$3^{45}\cdot 2^{-71}$	1.939866

表17　含13个“半京”(33)佚喜⟷(45)争南

生律编号	律名	相对波长	相对音高
45	争南	$3^{45}\cdot 2^{-71}$	1.939866
351	仁威	$3^{-351}\cdot 2^{556}$	1.9309548
－8	反生姑洗	$3^{8}\cdot 2^{-13}$	1.9218016
298	逍遥	$3^{-298}\cdot 2^{472}$	1.9128904
－61	后恣性	$3^{61}\cdot 2^{-97}$	1.9037372
245	恣性	$3^{-245}\cdot 2^{388}$	1.894826
－114	后种生	$3^{114}\cdot 2^{-181}$	1.8856728
192	种生	$3^{-192}\cdot 2^{304}$	1.8767616
－167	后四隙	$3^{167}\cdot 2^{-265}$	1.8676084
139	四隙	$3^{-139}\cdot 2^{220}$	1.8586972
－220	后幹党	$3^{220}\cdot 2^{-349}$	1.849544
86	幹党	$3^{-86}\cdot 2^{136}$	1.8406328
－273	后佚喜	$3^{273}\cdot 2^{-433}$	1.8314796
33	佚喜	$3^{33}\cdot 2^{-52}$	1.8225684

5. 姑洗部　表 19－23 姑洗一部，含正、反相生六十三律，共形成 63 个“半京”区间。

生律编号	律名	相对波长	相对音高
187	炎风	$3^{-187}\cdot 2^{296}$	2.3278876
−172	后实沈	$3^{172}\cdot 2^{-273}$	2.3187344
134	实沈	$3^{-134}\cdot 2^{212}$	2.3098232
−225	后日旅	$3^{225}\cdot 2^{-357}$	2.30067
81	日旅	$3^{-81}\cdot 2^{128}$	2.2917588
−278	后路时	$3^{278}\cdot 2^{-441}$	2.2828476
28	路时	$3^{28}\cdot 2^{-44}$	2.2736944

表 20　含 13 个“半京”（16）变虞⟷（28）路时

生律编号	律名	相对波长	相对音高
28	路时	$3^{28}\cdot 2^{-44}$	2.2736944
334	疏道	$3^{-334}\cdot 2^{529}$	2.2647832
−25	后媚岭	$3^{25}\cdot 2^{-40}$	2.25563
281	媚岭	$3^{-281}\cdot 2^{445}$	2.2467188
−78	后卿云	$3^{78}\cdot 2^{-124}$	2.2375656
228	卿云	$3^{-228}\cdot 2^{361}$	2.2286544
−131	后始升	$3^{131}\cdot 2^{-208}$	2.2195012
175	始升	$3^{-175}\cdot 2^{277}$	2.21059
−184	后嘉气	$3^{184}\cdot 2^{-292}$	2.2014368
122	嘉气	$3^{-122}\cdot 2^{193}$	2.1925256
−237	后擢颖	$3^{237}\cdot 2^{-376}$	2.1833724
69	擢颖	$3^{-69}\cdot 2^{109}$	2.1744612
−290	后变虞	$3^{290}\cdot 2^{-460}$	2.165308
16	变虞	$3^{16}\cdot 2^{-25}$	2.1563968

表 19　含 13 个“半京”（4）姑洗⟷（16）变虞

生律编号	律名	相对波长	相对音高
16	变虞	$3^{16}\cdot 2^{-25}$	2.1563968
322	洗陈	$3^{-322}\cdot 2^{510}$	2.1474856
−37	后携角	$3^{37}\cdot 2^{-59}$	2.1383324
269	携角	$3^{-269}\cdot 2^{426}$	2.1294212
−90	后方显	$3^{90}\cdot 2^{-143}$	2.120268
216	方显	$3^{-216}\cdot 2^{342}$	2.1113568
−143	后考神	$3^{143}\cdot 2^{-227}$	2.1022036
163	考神	$3^{-163}\cdot 2^{258}$	2.0932924
−196	后怀来	$3^{196}\cdot 2^{-311}$	2.0841392
110	怀来	$3^{-110}\cdot 2^{174}$	2.075228
−249	后南授	$3^{249}\cdot 2^{-395}$	2.0660748
57	南授	$3^{-57}\cdot 2^{90}$	2.0571636
−302	后姑洗	$3^{302}\cdot 2^{-479}$	2.0480104
4	姑洗	$3^{4}\cdot 2^{-6}$	2.0390992

表 23　含 11 个“半京”（52）依行⟷（11）仲吕

生律编号	律名	相对波长	相对音高
11	仲吕	$3^{11}\cdot 2^{-17}$	2.6075228
317	含贞	$3^{-317}\cdot 2^{502}$	2.5986116
−42	后扬庭	$3^{42}\cdot 2^{-67}$	2.5894584
264	扬庭	$3^{-264}\cdot 2^{418}$	2.5805472
−95	后䃂𪎭	$3^{95}\cdot 2^{-151}$	2.571394
211	䃂𪎭	$3^{-211}\cdot 2^{334}$	2.5624828
−148	后道从	$3^{148}\cdot 2^{-235}$	2.5533296
158	道从	$3^{-158}\cdot 2^{250}$	2.5444184
−201	后少选	$3^{201}\cdot 2^{-319}$	2.5352652
105	少选	$3^{-105}\cdot 2^{166}$	2.526354
−254	后依行	$3^{254}\cdot 2^{-403}$	2.5172008
52	依行	$3^{52}\cdot 2^{-82}$	2.5082896

表 22　含 13 个“半京”（40）刑始⟷（52）依行

生律编号	律名	相对波长	相对音高
52	依行	$3^{52}\cdot 2^{-82}$	2.5082896
358	壮进	$3^{-358}\cdot 2^{567}$	2.4993784
−1	反生仲吕	$3^{1}\cdot 2^{-2}$	2.4902252
305	登明	$3^{-305}\cdot 2^{483}$	2.481314
−54	后茂实	$3^{54}\cdot 2^{-86}$	2.4721608
252	茂实	$3^{-252}\cdot 2^{399}$	2.4632496
−107	后革荑	$3^{107}\cdot 2^{-170}$	2.4540964
199	革荑	$3^{-199}\cdot 2^{315}$	2.4451852
−160	后物华	$3^{160}\cdot 2^{-254}$	2.436032
146	物华	$3^{-146}\cdot 2^{231}$	2.4271208
−213	后方齐	$3^{213}\cdot 2^{-338}$	2.4179676
93	方齐	$3^{-93}\cdot 2^{147}$	2.4090564
−266	后刑始	$3^{266}\cdot 2^{-422}$	2.3999032
40	刑始	$3^{40}\cdot 2^{-63}$	2.390992

表 21 含 13 个“半京”（28）路时⟷（40）刑始

生律编号	律名	相对波长	相对音高
40	刑始	$3^{40}\cdot 2^{-63}$	2.390992
346	方结	$3^{-346}\cdot 2^{548}$	2.3820808
−13	后柔条	$3^{13}\cdot 2^{-21}$	2.3729276
293	柔条	$3^{-293}\cdot 2^{464}$	2.3640164
−66	后首节	$3^{66}\cdot 2^{-105}$	2.3548632
240	首节	$3^{-240}\cdot 2^{380}$	2.345952
−119	后炎风	$3^{119}\cdot 2^{-189}$	2.3367988

6. 仲吕部　表24－27 仲吕一部，含正、反相生五十律，共形成50个“半京”区间。

表25　含13个“半京”（23）南中⟷（35）内贞

生律编号	律名	相对波长	相对音高
35	内贞	$3^{-35}\cdot 2^{55}$	2.842118
341	相趣	$3^{-341}\cdot 2^{540}$	2.8332068
－18	后敬致	$3^{18}\cdot 2^{-29}$	2.8240536
288	敬致	$3^{-288}\cdot 2^{456}$	2.8151424
－71	后南讹	$3^{71}\cdot 2^{-113}$	2.8059892
235	南讹	$3^{-235}\cdot 2^{372}$	2.797078
－124	后有程	$3^{124}\cdot 2^{-197}$	2.7879248
182	有程	$3^{-182}\cdot 2^{288}$	2.7790136
－177	后率农	$3^{177}\cdot 2^{-281}$	2.7698604
129	率农	$3^{-129}\cdot 2^{204}$	2.7609492
－230	后离春	$3^{230}\cdot 2^{-365}$	2.751796
76	离春	$3^{-76}\cdot 2^{120}$	2.7428848
－283	后南中	$3^{283}\cdot 2^{-449}$	2.7337316
23	南中	$3^{-23}\cdot 2^{36}$	2.7248204

表24　含13个“半京”（11）仲吕⟷（23）南中

生律编号	律名	相对波长	相对音高
23	南中	$3^{-23}\cdot 2^{36}$	2.7248204
329	斯奋	$3^{-329}\cdot 2^{521}$	2.7159092
－30	后羽物	$3^{30}\cdot 2^{-48}$	2.706756
276	羽物	$3^{-276}\cdot 2^{437}$	2.6978448
－83	后初缓	$3^{83}\cdot 2^{-132}$	2.6886916
223	初缓	$3^{-223}\cdot 2^{353}$	2.6797804
－136	后景风	$3^{136}\cdot 2^{-216}$	2.6706272
170	景风	$3^{-170}\cdot 2^{269}$	2.661716
－189	后启运	$3^{189}\cdot 2^{-300}$	2.6525628
117	启运	$3^{-117}\cdot 2^{185}$	2.6436516
－242	后硃明	$3^{242}\cdot 2^{-384}$	2.6344984
64	硃明	$3^{-64}\cdot 2^{101}$	2.6255872
－295	后仲吕	$3^{295}\cdot 2^{-468}$	2.616434
11	仲吕	$3^{11}\cdot 2^{-17}$	2.6075228

表27　含11个“半京”（47）物应⟷（6）蕤宾

生律编号	律名	相对波长	相对音高
6	蕤宾	$3^{-6}\cdot 2^{9}$	3.0586488
312	祚周	$3^{-312}\cdot 2^{494}$	3.0497376
－47	后天庭	$3^{47}\cdot 2^{-75}$	3.0405844
259	天庭	$3^{-259}\cdot 2^{410}$	3.0316732
－100	后贞轸	$3^{100}\cdot 2^{-159}$	3.02252
206	贞轸	$3^{-206}\cdot 2^{326}$	3.0136088
－153	后荒落	$3^{153}\cdot 2^{-243}$	3.0044556
153	荒落	$3^{-153}\cdot 2^{242}$	2.9955444
－206	后戒簭	$3^{206}\cdot 2^{-327}$	2.9863912
100	戒簭	$3^{-100}\cdot 2^{158}$	2.97748
－259	后物应	$3^{259}\cdot 2^{-411}$	2.9683268
47	物应	$3^{-47}\cdot 2^{74}$	2.9594156

表26　含13个“半京”（35）内贞⟷（47）物应

生律编号	律名	相对波长	相对音高
47	物应	$3^{-47}\cdot 2^{74}$	2.9594156
353	清和	$3^{-353}\cdot 2^{559}$	2.9505044
－6	反生蕤宾	$3^{6}\cdot 2^{-10}$	2.9413512
300	巳气	$3^{-300}\cdot 2^{475}$	2.93244
－59	后曜畴	$3^{59}\cdot 2^{-94}$	2.9232868
247	曜畴	$3^{-247}\cdot 2^{391}$	2.9143756
－112	后屈轶	$3^{112}\cdot 2^{-178}$	2.9052224
194	屈轶	$3^{-194}\cdot 2^{307}$	2.8963112
－165	后含辉	$3^{165}\cdot 2^{-262}$	2.887158
141	含辉	$3^{-141}\cdot 2^{223}$	2.8782468
－218	后硃草	$3^{218}\cdot 2^{-346}$	2.8690936
88	硃草	$3^{-88}\cdot 2^{139}$	2.8601824
－271	后内贞	$3^{271}\cdot 2^{-430}$	2.8510292
35	内贞	$3^{-35}\cdot 2^{55}$	2.842118

7. 蕤宾部　表28－31 蕤宾一部，含正、反相生五十律，共形成50个“半京”区间。

表29　含13个“半京”（18）盛变⟷（30）离躬

生律编号	律名	相对波长	相对音高
30	离躬	$3^{-30} \cdot 2^{47}$	3. 293244
336	息沴	$3^{-336} \cdot 2^{532}$	3. 2843328
－23	后海水	$3^{23} \cdot 2^{-37}$	3. 2751796
283	海水	$3^{-283} \cdot 2^{448}$	3. 2662684
－76	后轨同	$3^{76} \cdot 2^{-121}$	3. 2571152
230	轨同	$3^{-230} \cdot 2^{364}$	3. 248204
－129	后声暨	$3^{129} \cdot 2^{-205}$	3. 2390508
177	声暨	$3^{-177} \cdot 2^{280}$	3. 2301396
－182	后怀远	$3^{182} \cdot 2^{-289}$	3. 2209864
124	怀远	$3^{-124} \cdot 2^{196}$	3. 2120752
－235	后宾安	$3^{235} \cdot 2^{-373}$	3. 202922
71	宾安	$3^{-71} \cdot 2^{112}$	3. 1940108
－288	后盛变	$3^{288} \cdot 2^{-457}$	3. 1848576
18	盛变	$3^{-18} \cdot 2^{28}$	3. 1759464

表28　含13个“半京”（6）蕤宾⟷（18）盛变

生律编号	律名	相对波长	相对音高
18	盛变	$3^{-18} \cdot 2^{28}$	3. 1759464
324	潜动	$3^{-324} \cdot 2^{513}$	3. 1670352
－35	后满赢	$3^{35} \cdot 2^{-56}$	3. 157882
271	满赢	$3^{-271} \cdot 2^{429}$	3. 1489708
－88	后布萼	$3^{88} \cdot 2^{-140}$	3. 1398176
218	布萼	$3^{-218} \cdot 2^{345}$	3. 1309064
－141	后则选	$3^{141} \cdot 2^{-224}$	3. 1217532
165	则选	$3^{-165} \cdot 2^{261}$	3. 112842
－194	后谧静	$3^{194} \cdot 2^{-308}$	3. 1036888
112	谧静	$3^{-112} \cdot 2^{177}$	3. 0947776
－247	后南事	$3^{247} \cdot 2^{-392}$	3. 0856244
59	南事	$3^{-59} \cdot 2^{93}$	3. 0767132
－300	后蕤宾	$3^{300} \cdot 2^{-476}$	3. 06756
6	蕤宾	$3^{-6} \cdot 2^{9}$	3. 0586488

表31　含11个“半京”（42）制时⟷（1）林钟

生律编号	律名	相对波长	相对音高
1	林钟	$3^{-1} \cdot 2^{1}$	3. 5097748
307	其煌	$3^{-307} \cdot 2^{486}$	3. 5008636
－52	后高焰	$3^{52} \cdot 2^{-83}$	3. 4917104
254	高焰	$3^{-254} \cdot 2^{402}$	3. 4827992
－105	后乂次	$3^{105} \cdot 2^{-167}$	3. 473646
201	乂次	$3^{-201} \cdot 2^{318}$	3. 4647348
－158	后鹑火	$3^{158} \cdot 2^{-251}$	3. 4555816
148	鹑火	$3^{-148} \cdot 2^{234}$	3. 4466704
－211	后瑞通	$3^{211} \cdot 2^{-335}$	3. 4375172
95	瑞通	$3^{-95} \cdot 2^{150}$	3. 428606
－264	后制时	$3^{264} \cdot 2^{-419}$	3. 4194528
42	制时	$3^{-42} \cdot 2^{66}$	3. 4105416

表30　含13个“半京”（30）离躬⟷（42）制时

生律编号	律名	相对波长	相对音高
42	制时	$3^{-42} \cdot 2^{66}$	3. 4105416
348	朝阳	$3^{-348} \cdot 2^{551}$	3. 4016304
－11	反生林钟	$3^{11} \cdot 2^{-18}$	3. 3924772
295	凤翥	$3^{-295} \cdot 2^{467}$	3. 383566
－64	后升中	$3^{64} \cdot 2^{-102}$	3. 3744128
242	升中	$3^{-242} \cdot 2^{383}$	3. 3655016
－117	后远眺	$3^{117} \cdot 2^{-186}$	3. 3563484
189	远眺	$3^{-189} \cdot 2^{299}$	3. 3474372
－170	后崇明	$3^{170} \cdot 2^{-270}$	3. 338284
136	崇明	$3^{-136} \cdot 2^{215}$	3. 3293728
－223	后安壮	$3^{223} \cdot 2^{-354}$	3. 3202196
83	安壮	$3^{-83} \cdot 2^{131}$	3. 3113084
－276	后离躬	$3^{276} \cdot 2^{-438}$	3. 3021552
30	离躬	$3^{-30} \cdot 2^{47}$	3. 293244

8. 林钟部　表 32－36 林钟一部，含正、反相生六十三律，共形成 63 个“半京”区间。

表 33　含 13 个“半京”(13)去灭←→(25)安度

生律编号	律名	相对波长	相对音高
25	安度	$3^{-25}\cdot2^{39}$	3.74437
331	宽中	$3^{-331}\cdot2^{524}$	3.7354588
－28	后仰成	$3^{28}\cdot2^{-45}$	3.7263056
278	仰成	$3^{-278}\cdot2^{440}$	3.7173944
－81	后均任	$3^{81}\cdot2^{-129}$	3.7082412
225	均任	$3^{-225}\cdot2^{356}$	3.69933
－134	后云布	$3^{134}\cdot2^{-213}$	3.6901768
172	云布	$3^{-172}\cdot2^{272}$	3.6812656
－187	后朋庆	$3^{187}\cdot2^{-297}$	3.6721124
119	朋庆	$3^{-119}\cdot2^{188}$	3.6632012
－240	后华销	$3^{240}\cdot2^{-381}$	3.654048
66	华销	$3^{-66}\cdot2^{104}$	3.6451368
－293	后去灭	$3^{293}\cdot2^{-465}$	3.6359836
13	去灭	$3^{-13}\cdot2^{20}$	3.6270724

表 32　含 13 个“半京”(1)林钟←→(13)去灭

生律编号	律名	相对波长	相对音高
13	去灭	$3^{-13}\cdot2^{20}$	3.6270724
319	靡慝	$3^{-319}\cdot2^{505}$	3.6181612
－40	后阴升	$3^{40}\cdot2^{-64}$	3.609008
266	阴升	$3^{-266}\cdot2^{421}$	3.6000968
－93	后方壮	$3^{93}\cdot2^{-148}$	3.5909436
213	方壮	$3^{-213}\cdot2^{337}$	3.5820324
－146	后循道	$3^{146}\cdot2^{-232}$	3.5728792
160	循道	$3^{-160}\cdot2^{253}$	3.563968
－199	后崇德	$3^{199}\cdot2^{-316}$	3.5548148
107	崇德	$3^{-107}\cdot2^{169}$	3.5459036
－252	后谦侍	$3^{252}\cdot2^{-400}$	3.5367504
54	谦侍	$3^{-54}\cdot2^{85}$	3.5278392
－305	后林钟	$3^{305}\cdot2^{-484}$	3.518686
1	林钟	$3^{-1}\cdot2^{1}$	3.5097748

表 36　含 11 个“半京”(49)否与←→(8)夷则

生律编号	律名	相对波长	相对音高
8	夷则	$3^{-8}\cdot2^{12}$	4.0781984
314	财华	$3^{-314}\cdot2^{497}$	4.0692872
－45	后重轮	$3^{45}\cdot2^{-72}$	4.060134
261	重轮	$3^{-261}\cdot2^{413}$	4.0512228
－98	后日焕	$3^{98}\cdot2^{-156}$	4.0420696
208	日焕	$3^{-208}\cdot2^{329}$	4.0331584
－151	后曜井	$3^{151}\cdot2^{-240}$	4.0240052
155	曜井	$3^{-155}\cdot2^{245}$	4.015094
－204	后景口	$3^{204}\cdot2^{-324}$	4.0059408
102	景口	$3^{-102}\cdot2^{161}$	3.9970296
－257	后否与	$3^{257}\cdot2^{-408}$	3.9878764
49	否与	$3^{-49}\cdot2^{77}$	3.9789652

表 35　含 13 个“半京”(37)归嘉←→(49)否与

生律编号	律名	相对波长	相对音高
49	否与	$3^{-49}\cdot2^{77}$	3.9789652
355	物无	$3^{-355}\cdot2^{562}$	3.970054
－4	反生夷则	$3^{4}\cdot2^{-7}$	3.9609008
302	绣岭	$3^{-302}\cdot2^{478}$	3.9519896
－57	后蓂华	$3^{57}\cdot2^{-91}$	3.9428364
249	蓂华	$3^{-249}\cdot2^{394}$	3.9339252
－110	后候节	$3^{110}\cdot2^{-175}$	3.924772
196	候节	$3^{-196}\cdot2^{310}$	3.9158608
－163	后温风	$3^{163}\cdot2^{-259}$	3.9067076
143	温风	$3^{-143}\cdot2^{226}$	3.8977964
－216	后美音	$3^{216}\cdot2^{-343}$	3.8886432
90	美音	$3^{-90}\cdot2^{142}$	3.879732
－269	后归嘉	$3^{269}\cdot2^{-427}$	3.8705788
37	归嘉	$3^{-37}\cdot2^{58}$	3.8616676

表 34　含 13 个“半京”(25)安度←→(37)归嘉

生律编号	律名	相对波长	相对音高
37	归嘉	$3^{-37}\cdot2^{58}$	3.8616676
343	纯恪	$3^{-343}\cdot2^{543}$	3.8527564
－16	后任肃	$3^{16}\cdot2^{-26}$	3.8436032
290	任肃	$3^{-290}\cdot2^{459}$	3.834692
－69	后智深	$3^{69}\cdot2^{-110}$	3.8255388
237	智深	$3^{-237}\cdot2^{375}$	3.8166276
－122	后礼溢	$3^{122}\cdot2^{-194}$	3.8074744
184	礼溢	$3^{-184}\cdot2^{291}$	3.7985632
－175	后无蹇	$3^{175}\cdot2^{-278}$	3.78941
131	无蹇	$3^{-131}\cdot2^{207}$	3.7804988
－228	后德均	$3^{228}\cdot2^{-362}$	3.7713456
78	德均	$3^{-78}\cdot2^{123}$	3.7624344
－281	后安度	$3^{281}\cdot2^{-446}$	3.7532812
25	安度	$3^{-25}\cdot2^{39}$	3.74437

9. 夷则部　表37－40 夷则一部，含正、反相生五十律，共形成50个“半京”区间。

表38　含13个“半京”(20)鲜刑⟷(32)去南

生律编号	律名	相对波长	相对音高
32	去南	$3^{-32}\cdot2^{50}$	4.3127936
338	阴侣	$3^{-338}\cdot2^{535}$	4.3038824
－21	后归仁	$3^{21}\cdot2^{-34}$	4.2947292
285	归仁	$3^{-285}\cdot2^{451}$	4.285818
－74	后会道	$3^{74}\cdot2^{-118}$	4.2766648
232	会道	$3^{-232}\cdot2^{367}$	4.2677536
－127	后刘弥	$3^{127}\cdot2^{-202}$	4.2586004
179	刘弥	$3^{-179}\cdot2^{283}$	4.2496892
－180	后金天	$3^{180}\cdot2^{-286}$	4.240536
126	金天	$3^{-126}\cdot2^{199}$	4.2316248
－233	后贞剋	$3^{233}\cdot2^{-370}$	4.2224716
73	贞剋	$3^{-73}\cdot2^{115}$	4.2135604
－286	后鲜刑	$3^{286}\cdot2^{-454}$	4.2044072
20	鲜刑	$3^{-20}\cdot2^{31}$	4.195496

表40　含11个“半京”(44)分积⟷(3)南吕

生律编号	律名	相对波长	相对音高
3	南吕	$3^{-3}\cdot2^{4}$	4.5293244
309	俾义	$3^{-309}\cdot2^{489}$	4.5204132
－50	后金惟	$3^{50}\cdot2^{-80}$	4.51126
256	金惟	$3^{-256}\cdot2^{405}$	4.5023488
－103	后咸亨	$3^{103}\cdot2^{-164}$	4.4931956
203	咸亨	$3^{-203}\cdot2^{321}$	4.4842844
－156	后九德	$3^{156}\cdot2^{-248}$	4.4751312
150	九德	$3^{-150}\cdot2^{237}$	4.46622
－209	后孔脩	$3^{209}\cdot2^{-332}$	4.4570668
97	孔脩	$3^{-97}\cdot2^{153}$	4.4481556
－262	后分积	$3^{262}\cdot2^{-416}$	4.4390024
44	分积	$3^{-44}\cdot2^{69}$	4.4300912

表37　含13个“半京”(8)夷则⟷(20)鲜刑

生律编号	律名	相对波长	相对音高
20	鲜刑	$3^{-20}\cdot2^{31}$	4.195496
326	御叙	$3^{-326}\cdot2^{516}$	4.1865848
－33	后白藏	$3^{33}\cdot2^{-53}$	4.1774316
273	白藏	$3^{-273}\cdot2^{432}$	4.1685204
－86	后阴德	$3^{86}\cdot2^{-137}$	4.1593672
220	阴德	$3^{-220}\cdot2^{348}$	4.150456
－139	后气精	$3^{139}\cdot2^{-221}$	4.1413028
167	气精	$3^{-167}\cdot2^{264}$	4.1323916
－192	后清爽	$3^{192}\cdot2^{-305}$	4.1232384
114	清爽	$3^{-114}\cdot2^{180}$	4.1143272
－245	后升商	$3^{245}\cdot2^{-389}$	4.105174
61	升商	$3^{-61}\cdot2^{96}$	4.0962628
－298	后夷则	$3^{298}\cdot2^{-473}$	4.0871096
8	夷则	$3^{-8}\cdot2^{12}$	4.0781984

表39　含13个“半京”(32)去南⟷(44)分积

生律编号	律名	相对波长	相对音高
44	分积	$3^{-44}\cdot2^{69}$	4.4300912
350	黄晋	$3^{-350}\cdot2^{554}$	4.42118
－9	反生南吕	$3^{9}\cdot2^{-15}$	4.4120268
297	靡卉	$3^{-297}\cdot2^{470}$	4.4031156
－62	后和庚	$3^{62}\cdot2^{-99}$	4.3939624
244	和庚	$3^{-244}\cdot2^{386}$	4.3850512
－115	后延乙	$3^{115}\cdot2^{-183}$	4.375898
191	延乙	$3^{-191}\cdot2^{302}$	4.3669868
－168	后柔辛	$3^{168}\cdot2^{-267}$	4.3578336
138	柔辛	$3^{-138}\cdot2^{218}$	4.3489224
－221	后阳消	$3^{221}\cdot2^{-351}$	4.3397692
85	阳消	$3^{-85}\cdot2^{134}$	4.330858
－274	后去南	$3^{274}\cdot2^{-435}$	4.3217048
32	去南	$3^{-32}\cdot2^{50}$	4.3127936

10. 南吕部　表41－45 南吕一部，含正、反相生六十三律，共形成63个“半京”区间。

生律编号	律名	相对波长	相对音高
186	允塞	$3^{-186}\cdot 2^{294}$	4.8181128
-173	后王猷	$3^{173}\cdot 2^{-275}$	4.8089596
133	王猷	$3^{-133}\cdot 2^{210}$	4.8000484
-226	后中德	$3^{226}\cdot 2^{-359}$	4.7908952
80	中德	$3^{-80}\cdot 2^{126}$	4.781984
-279	后归期	$3^{279}\cdot 2^{-443}$	4.7728308
27	归期	$3^{-27}\cdot 2^{42}$	4.7639196

表42　含13个“半京”(15)结躬←→(27)归期

生律编号	律名	相对波长	相对音高
27	归期	$3^{-27}\cdot 2^{42}$	4.7639196
333	有截	$3^{-333}\cdot 2^{527}$	4.7550084
-26	后威远	$3^{26}\cdot 2^{-42}$	4.7458552
280	威远	$3^{-280}\cdot 2^{443}$	4.736944
-79	后抗节	$3^{79}\cdot 2^{-126}$	4.7277908
227	抗节	$3^{-227}\cdot 2^{359}$	4.7188796
-132	后晟阴	$3^{132}\cdot 2^{-210}$	4.7097264
174	晟阴	$3^{-174}\cdot 2^{275}$	4.7008152
-185	后嬴中	$3^{185}\cdot 2^{-294}$	4.691662
121	嬴中	$3^{-121}\cdot 2^{191}$	4.6827508
-238	后肥遁	$3^{238}\cdot 2^{-378}$	4.6735976
68	肥遁	$3^{-68}\cdot 2^{107}$	4.6648864
-291	后结躬	$3^{291}\cdot 2^{-462}$	4.6555332
15	结躬	$3^{-15}\cdot 2^{23}$	4.646622

表41　含13个“半京”(3)南吕←→(15)结躬

生律编号	律名	相对波长	相对音高
15	结躬	$3^{-15}\cdot 2^{23}$	4.646622
321	酋稔	$3^{-321}\cdot 2^{508}$	4.6377108
-38	后劲物	$3^{38}\cdot 2^{-61}$	4.6285576
268	劲物	$3^{-268}\cdot 2^{424}$	4.6196464
-91	后素风	$3^{91}\cdot 2^{-145}$	4.6104932
215	素风	$3^{-215}\cdot 2^{340}$	4.601582
-144	后敦实	$3^{144}\cdot 2^{-229}$	4.5924288
162	敦实	$3^{-162}\cdot 2^{256}$	4.5835176
-197	后捐秀	$3^{197}\cdot 2^{-313}$	4.5743644
109	捐秀	$3^{-109}\cdot 2^{172}$	4.5658532
-250	后白吕	$3^{250}\cdot 2^{-397}$	4.5563
56	白吕	$3^{-56}\cdot 2^{88}$	4.5475888
-303	后南吕	$3^{303}\cdot 2^{-481}$	4.5382356
3	南吕	$3^{-3}\cdot 2^{4}$	4.5293244

表45　含11个“半京”(51)夷汗←→(10)无射

生律编号	律名	相对波长	相对音高
10	无射	$3^{-10}\cdot 2^{15}$	5.097748
316	光赍	$3^{-316}\cdot 2^{500}$	5.0888368
-43	后九有	$3^{43}\cdot 2^{-69}$	5.0796836
263	九有	$3^{-263}\cdot 2^{416}$	5.0707724
-96	后亡劳	$3^{96}\cdot 2^{-153}$	5.0616192
210	亡劳	$3^{-210}\cdot 2^{332}$	5.052708
-149	后悦使	$3^{149}\cdot 2^{-237}$	5.0435548
157	悦使	$3^{-157}\cdot 2^{248}$	5.0346436
-202	后均义	$3^{202}\cdot 2^{-321}$	5.0254904
104	均义	$3^{-104}\cdot 2^{164}$	5.0165792
-255	后夷汗	$3^{255}\cdot 2^{-405}$	5.007426
51	夷汗	$3^{-51}\cdot 2^{80}$	4.9985148

表44　含13个“半京”(39)未印←→(51)夷汗

生律编号	律名	相对波长	相对音高
51	夷汗	$3^{-51}\cdot 2^{80}$	4.9985148
357	归藏	$3^{-357}\cdot 2^{565}$	4.9804504
-2	反生无射	$3^{2}\cdot 2^{-4}$	4.9804504
304	蓄止	$3^{-304}\cdot 2^{481}$	4.9715392
-55	后贞坚	$3^{55}\cdot 2^{-88}$	4.962386
251	贞坚	$3^{-251}\cdot 2^{397}$	4.9534748
-108	后道心	$3^{108}\cdot 2^{-172}$	4.9443216
198	道心	$3^{-198}\cdot 2^{313}$	4.9354104
-161	后分满	$3^{161}\cdot 2^{-256}$	4.9262572
145	分满	$3^{-145}\cdot 2^{229}$	4.917346
-214	后质随	$3^{214}\cdot 2^{-340}$	4.9081928
92	质随	$3^{-92}\cdot 2^{145}$	4.8992816
-267	后未印	$3^{267}\cdot 2^{-424}$	4.8901284
39	未印	$3^{-39}\cdot 2^{61}$	4.8812172

表43　含13个“半京”(27)归期←→(39)未印

生律编号	律名	相对波长	相对音高
39	未印	$3^{-39}\cdot 2^{61}$	4.8812172
345	摇落	$3^{-345}\cdot 2^{546}$	4.872306
-14	后搏辔	$3^{14}\cdot 2^{-23}$	4.8631528
292	搏辔	$3^{-292}\cdot 2^{462}$	4.8542416
-67	后蓐收	$3^{67}\cdot 2^{-107}$	4.8450884
239	蓐收	$3^{-239}\cdot 2^{378}$	4.8361772
-120	后允塞	$3^{120}\cdot 2^{-191}$	4.827024

11. 无射部　表46－49 无射一部，含正、反相生五十律，共形成50个“半京”区间。

表47　含13个“半京”（22）闭奄⟷（34）邻齐

生律编号	律名	相对波长	相对音高
34	邻齐	$3^{-34}\cdot 2^{53}$	5.3323432
340	明奎	$3^{-340}\cdot 2^{538}$	5.323432
－19	后阉藏	$3^{19}\cdot 2^{-31}$	5.3142788
287	阉藏	$3^{-287}\cdot 2^{454}$	5.3053676
－72	后旋春	$3^{72}\cdot 2^{-115}$	5.2962144
234	旋春	$3^{-234}\cdot 2^{370}$	5.2873032
－125	后日在	$3^{125}\cdot 2^{-199}$	5.27815
181	日在	$3^{-181}\cdot 2^{286}$	5.2692388
－178	后藏邃	$3^{178}\cdot 2^{-283}$	5.2600856
128	藏邃	$3^{-128}\cdot 2^{202}$	5.2511744
－231	后降娄	$3^{231}\cdot 2^{-367}$	5.2420212
75	降娄	$3^{-75}\cdot 2^{118}$	5.23311
－284	后闭奄	$3^{284}\cdot 2^{-451}$	5.2239568
22	闭奄	$3^{-22}\cdot 2^{34}$	5.2150456

表46　含13个“半京”（10）无射⟷（22）闭奄

生律编号	律名	相对波长	相对音高
22	闭奄	$3^{-22}\cdot 2^{34}$	5.2150456
328	销祥	$3^{-328}\cdot 2^{519}$	5.2061344
－31	后恤农	$3^{31}\cdot 2^{-50}$	5.1969812
275	恤农	$3^{-275}\cdot 2^{435}$	5.18807
－84	后休老	$3^{84}\cdot 2^{-134}$	5.1789168
222	休老	$3^{-222}\cdot 2^{351}$	5.1700056
－137	后恭俭	$3^{137}\cdot 2^{-218}$	5.1608524
169	恭俭	$3^{-169}\cdot 2^{267}$	5.1519412
－190	后怀谦	$3^{190}\cdot 2^{-302}$	5.142788
116	怀谦	$3^{-116}\cdot 2^{183}$	5.1338768
－243	后思冲	$3^{243}\cdot 2^{-386}$	5.1247236
63	思冲	$3^{-63}\cdot 2^{99}$	5.1158124
－296	后无射	$3^{296}\cdot 2^{-470}$	5.1066592
10	无射	$3^{-10}\cdot 2^{15}$	5.097748

表49　含11个“半京”（46）期保⟷（5）应钟

生律编号	律名	相对波长	相对音高
5	应钟	$3^{-5}\cdot 2^{7}$	5.548874
311	澄天	$3^{-311}\cdot 2^{492}$	5.5399628
－48	后玄月	$3^{48}\cdot 2^{-77}$	5.5308096
258	玄月	$3^{-258}\cdot 2^{408}$	5.5218984
－101	后野色	$3^{101}\cdot 2^{-161}$	5.5127452
205	野色	$3^{-205}\cdot 2^{324}$	5.503834
－154	后秋深	$3^{154}\cdot 2^{-245}$	5.4946808
152	秋深	$3^{-152}\cdot 2^{240}$	5.4857696
－207	后延年	$3^{207}\cdot 2^{-329}$	5.4766164
99	延年	$3^{-99}\cdot 2^{156}$	5.4677052
－260	后期保	$3^{260}\cdot 2^{-413}$	5.458552
46	期保	$3^{-46}\cdot 2^{72}$	5.4496408

表48　含13个“半京”（34）邻齐⟷（46）期保

生律编号	律名	相对波长	相对音高
46	期保	$3^{-46}\cdot 2^{72}$	5.4496408
352	无边	$3^{-352}\cdot 2^{557}$	5.4407296
－7	反生应钟	$3^{7}\cdot 2^{-12}$	5.4315764
299	息肩	$3^{-299}\cdot 2^{473}$	5.4226652
－60	后下济	$3^{60}\cdot 2^{-96}$	5.413512
246	下济	$3^{-246}\cdot 2^{389}$	5.4046008
－113	后啬敛	$3^{113}\cdot 2^{-180}$	5.3954476
193	啬敛	$3^{-193}\cdot 2^{305}$	5.3865364
－166	后大蓄	$3^{166}\cdot 2^{-264}$	5.3773832
140	大蓄	$3^{-140}\cdot 2^{221}$	5.368472
－219	后轨众	$3^{219}\cdot 2^{-348}$	5.3593188
87	轨众	$3^{-87}\cdot 2^{137}$	5.3504076
－272	后邻齐	$3^{272}\cdot 2^{-432}$	5.3412544
34	邻齐	$3^{-34}\cdot 2^{53}$	5.3323432

12. 应钟部　表50－53应钟一部，含正、反相生五十律，共形成50个“半京”区间。

表51　含13个“半京”(17)迟内⟷(29)未育

生律编号	律名	相对波长	相对音高
29	未育	$3^{-29}\cdot2^{45}$	5.7834692
335	应徵	$3^{-335}\cdot2^{530}$	5.774558
-24	后动寂	$3^{24}\cdot2^{-39}$	5.7654048
282	动寂	$3^{-282}\cdot2^{446}$	5.7564936
-77	后凝晦	$3^{77}\cdot2^{-123}$	5.7473404
229	凝晦	$3^{-229}\cdot2^{362}$	5.7384292
-130	后姑射	$3^{130}\cdot2^{-207}$	5.729276
176	姑射	$3^{-176}\cdot2^{278}$	5.7203648
-183	后而乂	$3^{183}\cdot2^{-291}$	5.7112116
123	而乂	$3^{-123}\cdot2^{194}$	5.7023004
-236	后无为	$3^{236}\cdot2^{-375}$	5.6931472
70	无为	$3^{-70}\cdot2^{110}$	5.684236
-289	后迟内	$3^{289}\cdot2^{-459}$	5.6750828
17	迟内	$3^{-17}\cdot2^{26}$	5.6661716

表50　含13个“半京”(5)应钟⟷(17)迟内

生律编号	律名	相对波长	相对音高
17	迟内	$3^{-17}\cdot2^{26}$	5.6661716
323	静谧	$3^{-323}\cdot2^{511}$	5.6572604
-36	后乂定	$3^{36}\cdot2^{-58}$	5.6481072
270	乂定	$3^{-270}\cdot2^{427}$	5.639196
-89	后功成	$3^{89}\cdot2^{-142}$	5.6300428
217	功成	$3^{-217}\cdot2^{343}$	5.6211316
-142	后据始	$3^{142}\cdot2^{-226}$	5.6119784
164	据始	$3^{-164}\cdot2^{259}$	5.6030672
-195	后祖微	$3^{195}\cdot2^{-310}$	5.593914
111	祖微	$3^{-111}\cdot2^{175}$	5.5850028
-248	后分焉	$3^{248}\cdot2^{-394}$	5.5758496
58	分焉	$3^{-58}\cdot2^{91}$	5.5669384
-301	后应钟	$3^{301}\cdot2^{-478}$	5.5577852
5	应钟	$3^{-5}\cdot2^{7}$	5.548874

表53　含11个“半京”(41)迟时⟷(0)黄钟半律

生律编号	律名	相对波长	相对音高
359	安运	$3^{-359}\cdot2^{568}$	6.0091532
0	黄钟半律	$3^{-0}\cdot2^{1}$	6
306	亿兆	$3^{-306}\cdot2^{484}$	5.9910888
-53	后八荒	$3^{53}\cdot2^{-85}$	5.9819356
253	八荒	$3^{-253}\cdot2^{400}$	5.9730244
-106	后九野	$3^{106}\cdot2^{-169}$	5.9638712
200	九野	$3^{-200}\cdot2^{316}$	5.95496
-159	后无休	$3^{159}\cdot2^{-253}$	5.9458068
147	无休	$3^{-147}\cdot2^{232}$	5.9368956
-212	后方制	$3^{212}\cdot2^{-337}$	5.9277424
94	方制	$3^{-94}\cdot2^{148}$	5.9188312
-265	后迟时	$3^{265}\cdot2^{-421}$	5.909678
41	迟时	$3^{-41}\cdot2^{64}$	5.9007668

表52　含13个“半京”(29)未育⟷(41)迟时

生律编号	律名	相对波长	相对音高
41	迟时	$3^{-41}\cdot2^{64}$	5.9007668
347	修复	$3^{-347}\cdot2^{549}$	5.8918556
-12	后天长	$3^{12}\cdot2^{-20}$	5.8827024
294	天长	$3^{-294}\cdot2^{465}$	5.8737912
-65	后地久	$3^{65}\cdot2^{-104}$	5.864638
241	地久	$3^{-241}\cdot2^{381}$	5.8557268
-118	后无疆	$3^{118}\cdot2^{-188}$	5.8465736
188	无疆	$3^{-188}\cdot2^{297}$	5.8376624
-171	后万寿	$3^{171}\cdot2^{-272}$	5.8285092
135	万寿	$3^{-135}\cdot2^{213}$	5.819598
-224	后万机	$3^{224}\cdot2^{-356}$	5.8104448
82	万机	$3^{-82}\cdot2^{129}$	5.8015336
-277	后未育	$3^{277}\cdot2^{-440}$	5.7923804
29	未育	$3^{-29}\cdot2^{45}$	5.7834692

从以上数据梳理，可以清楚看出，反生至黄钟半律已经达到黄钟还原的目的。安运超出了黄钟半律的音高，所以，将“安运”设在[应钟部]是不合逻辑的。请将它与第231页表1的－306后黄钟0.0089112相比较，可以看出，现在我们已经用－306后黄钟取代了359安运。

附录二　术语及叙辞表(Glossary)

(只列第一次出现页码)

[A]

Ahir bhairav,印度音阶型 P.133

Aiyar,M.s.r. P.128

anuvadin(《乐舞论》中表示协和音程的术语) P.121

Āsāvári,印度音阶型 P.134

阿拔斯王朝(Abbasid Dynasty) P.135

阿波托美半音(apotome),五度相生大半音 P.128

阿德利安·佛拉哥(Adriaan Vlacq) P.193

阿尔·法拉比(Abū Nasr al—Fārābī) P.136

阿尔-肯迪(Abū Yūsuf Al-Kindī) P.137

阿霍帕拉·彭迪达(Ahobala-Pandita) P.129

阿拉伯调式 P.149

阿拉伯文艺复兴运动 P.154

阿拉伯音乐大会 P.154

阿诺尔德·施利克(Arnold Schlick) P.181

阿让(Pietro Aaron,1480~1550年) P.181

阿维森那(Avicenna,即伊本·西那) P.142

阿乌亚拉('awjārā) P.157

阿希塔斯(Archytas) P.159

埃拉托斯腾尼斯(Eratosthenes) P.159

埃利斯(Alexander Ellis) P.10

安达卢西亚(Andalusia) P.173

安徽法 P.85

安运 P.67

按音节点 P.101

按音指位 P.100

暗徽 P.100

奥丁顿(Walter de Odington) P.169

[B]

Bhaīrav,印度音阶型 P.134

Bhairavī 印度音阶型 P.134

Bilāval 印度音阶型 P.134

bin,印度乐器 P.121

Brāhmana(大全音) P.127

八度协和(octave consonant) P.108

八十四调 P.80

巴赫(Bach, Johann Sebastian) P.184

柏拉图(Plato,) P.161

拜亚提(bayātī) P.156

稗依萨(Baéza) P.173

班恩(Joan Albert Ban,1597~1644年) P.180

半减七和弦 P.55

半降 P.144

半京甲 P.67

半京乙 P.67

半律清黄钟 P.80

半升 P.144

半音(halftone, semitone) P.6

半音音阶(chromatic scale) P.26

半增四度 P.156

棒状齐特尔类乐器 P.125

倍半关系 P.33

倍波(times of wave) P.22

本质规定性 P.30

本质剖析 P.6
比较音乐学 P.203
比例常数(proportion constant) P.9
比例当数(ratio match) P.23
比例中项(ratio mean) P.118
毕达哥拉斯(Pythagoras) P.16
毕达哥拉斯律制(Pythagorean tuning) P.25
毕达哥拉斯音差(comma maxima) P.27
碧玉调 P.98
变宫为角 P.94
变化四音列(chromatic tetrachord) P.167
变律 P.82
变徵 P.26
标准调音法 P.185
波长连比式 P.34
波斯音阶(Persian scale) P.145
波斯中指(Persian middle finger) P.138
博桑奎特(R. H. M. Bosanquet) P.200
不等程音阶(unequal scale) P.200
不平均九律 P.136
不平均十七律 P.145
不协和(inconsonance) P.120
布品法 P.129
布塞利克(Būsalīk)调式 P.150
布祖尔克(Buzurk)调式 P.151
[C]
蔡元定 P.82
侧孔校正 P.209
测音数据 P.43
长度比值(length rate) P.16
常数(constant) P.7
常用对数(common logarithm) P.8
常用对数表(common logarithm table) P.8
陈应时 P.80
陈仲儒 P.204
陈拙 P.100
尺字调指法 P.75
重新诠释 P.30
传递机制 P.7
传统律学 P.10
纯八度(octave, diplasios) P.3
纯律(just intonation) P.5
纯律八声音阶 P.172
纯律大六度(major sixth 5-limit) P.5
纯律大七度,大七和弦内的大七度(major seventh 5-limit) P.29
纯律大三度(major third 5-limit) P.5
纯律宽四度(wide fourth 5-limit) P.167
纯律狭五度(narrow fifth 5-limit) P.178
纯律小半音(minal semitone 5-limit) P.172
纯律小六度(minor sixth 5-limit) P.5
纯律小七度,小七和弦内的小七度(minor seventh 5-limit) P.29
纯律小三度(minor third 5-limit) P.5
纯律音系网(just intonation of system) P.30
纯律增二度(augmented secondd 5-limit) P.29
纯四度(Perfect fourth, epitritos) P.3
纯五度(Perfect fifth, hemiolios, sesquialtera) P.3
茨岗(吉卜赛)音阶 P.167
刺激量(stimulus numerically estimated) P.7
崔宪 P.42
崔遵度 P.84
[D]
大半音(major semitone) P.27
大调音阶(major tone scale) P.28
大键琴(harpsichord, clavicembalo) P.180
大全音(whole tone, tonus, epogdoos) P.27
大吕 P.26

大三和弦(major chord) P.34
大三和弦模式 P.89
大数幂式 P.52
戴念祖 P.190
倒映 P.33
德维特里(Philippe de Vitry) P.169
等比数列(Geometric Proportion Series) P.116
等差数列(Arithmetic Series) P.32
等差划分(arithmetic divide) P.34
狄迪莫斯(Didymos) P.159
狄氏音差(Didymos comma) P.159
笛上三调 P.74
第西斯(diesis) P.179
第一转位 P.55
第二转位 P.56
电子调律(electronic tuning) P.185
电子振荡器 P.197
调域 P.182
定弦步骤 P.94
定弦法 P.87
独立发生 P.214
独弦器(monochord 原义为“单弦”) P.16
端口校正 P.210
端口校正公式 P.210
对数(logarithm) P.6
多利亚调式(dorian) P.164
多样性 P.135
[E]
厄汀恩(Oettingen, Arthur Joachim von) P.34
Ⅱ级七和弦 P.34
二十四平均律(24eq.-temperament) P.32
[F]
法默(Farmer, H.G.) P.139
凡字调指法 P.75
反功能变化半音 P.6
反生法 P.25
泛音(overtone,也称“分音”partial tone) P.4
仿制品 P.201
费希纳(Fechner, Gustav Theodor) P.7
分春之日 P.65
分数连比式 P.89
冯水 P.85
冯文慈 P.86
弗兰科(Franko, von Köln) P.169
弗里吉亚调式(phrygian) P.163
福斯特(Forster, Cris.) P.169
附加校正值 P.32
[G]
伽利略(Galilei, Galileo) P.187
加利莱伊,V.(Galilei, Vincenzo) P.187
感觉量(sensation as numerical units) P.7
感觉器官(sense organ) P.7
高芬达(Govinda) P.129
格音阶(gāndhāra-grāma) P.123
根音 P.28
弓形竖琴(vina, harp) P.121
功能多义性 P.124
功能性理论内核 P.32
公因数 P.53
宫角之差 P.69
共泛音结合法则(law of tones combined by one common overtone) P.34
共泛音音列(common overtone series) P.198
共振(sympathetic vibration) P.7
勾股定理(Pythagorean proposition) P.117
姑洗 P.26
姑洗调 P.95
古代音差、最大音差(comma maxima) P.27
古代中指(ancient middle finger) P.138
古钢琴(clavichord) P.179

古京差额 P.62
乖相生之道 P.25
管风琴(organ) P.179
管口校正数 P.69
管子 P.41
规范性 P.135
[H]
哈里发时期(四代哈里发,从公元632~661年) P.135
含"清角"的七声音阶 P.25
含半音的四音列 P.154
含变化半音的四音列 P.155
含中立音的四音列 P.143
韩宝强 P.4
豪普特曼(Hauptmann, Moritz) P.34
合成音(combination tone) P.195
何承天 P.59
何承天算法 P.77
何承天新律 P.27
和声二元论(harmonischer dualismus) P.34
和声功能理论(harmoniefunctionen theory) P.34
和声小调(harmonic minor mode) P.11
和声小调音阶(harmonic minor scale) P.30
和谐划分(harmonic divide) P.34
和谐级数(harmonious progression) P.176
和谐数列(harmonious numero senario) P.173
和谐派 P.159
和谐原理(principle of harmonious) P.4
和谐振动(resonance) P.198
和谐中项(harmonious mean) P.175
亥尔姆霍兹(Helmholtz, Hermann von) P.34
赫悌人(Hitties) P.135
亨瑞·布利格斯(Henry Briggs) P.193
横向线段 P.30
胡赛尼(Husayni)调式 P.152
淮南律数 P.52
淮南子 P.52
换底公式(refoot formula) P.14
黄翔鹏 P.43
黄钟 P.15
黄钟倍律 P.117
黄钟长度 P.65
黄钟大数 P.57
黄钟还原 P.76
黄钟九寸 P.119
黄钟均 P.62
黄钟正律 P.65
徽分 P.102
徽分顺逆推算法 P.209
徽间音位 P.102
徽外 P.100
徽位 P.84
徽位计算法 P.209
[J]
基础低音 P.195
基础乐理 P.3
基恩伯格(J. P. Kirnberg) P.184
基链、基列 P.44
基音(fundamental tone) P.4
济拉夫坎德(Zīrāfkand)调式 P.151
夹钟 P.76
夹钟调 P.95
假分数(improper fraction) P.3
减略共振 P.198
减七和弦(diminished seventh chord) P.56
减四度(diminished fourth) P.11
减字谱 P.96
简单整数比 P.22
姜夔 P.91

蒋克谦 P.85
交替相生 P.58
节点(node) P.85
今羽调、金羽调 P.95
金斯(jins) P.154
近似大三度(approximately major third) P.131
近似中二度(approximately neutral second) P.124
近似中三度(approximately neutral third) P.124
京房 60 律 P.27
京房微差,京氏音差(京氏 komma) P.62
经过音 P.181
经验性约数 P.76
晋尺 P.72
九分之二音差中庸全音律 P.183
绝对波长(absolute wavelength) P.13
绝对弦长(absolute stringlength) P.101
均钟 P.43
Jose S. Buenconsejo P.127
[K]
Kafi P.134
Kalyān P.134
Kh̄amāj P.134
Kṣatriya(小全音) P.127
克来斯马(kleisma) P.200
克劳迪亚斯·托勒密(Cluadius Ptolemy) P.139
客观量 P.7
空气振动(Vibrating air) P.17
库尔迪(Kurdi) P.156
[L]
拉格(raga) P.128
拉格分类法 P.129
拉哈维(Rahāwī)调式 P.152
拉克卜(rakb) P.158
拉玛马特亚(Ramamatya) P.128
Lalit P.133
拉摩(Jean Philipe Rameau) P.34
拉莫斯(Bartolomé Ramos[Ramis] de Pareja) P.169
拉斯特(rāst) P.156
拉斯特(Rāst)调式 P.150
莱比锡变化半音(Leipziger Chroma) P.199
莱比锡音差(Leipziger Komma) P.199
莱比锡音乐理论学派 P.34
狼音(wolf) P.182
李玫 P.214
李约瑟(J. Needham) P.190
里拉琴(lyra) P.159
里曼(Hugo Riemann) P.10
两仪生成 P.214
量音理论(measure of method) P.135
列和 P.68
林玛半音(limma,五度相生小半音) P.27
林玛音程系数$\frac{256}{243}$ P.27
林钟 P.15
伶州鸠 P.84
刘焯 P.79
刘复 P.202
刘歆尺 P.70
琉特类乐器 P.16
琉特式维纳(vina) P.121
六倍波(sextuple wavelength) P.197
六分之一音差中庸全音律 P.183
6 数列(numero Senario) P.173
龙龈 P.86
逻辑贯通性 P.54
逻辑演绎关系 P.45
吕第亚调式(lydian) P.163
吕第亚调式音阶(lydian scale) P.175

吕氏春秋 P. 15
律数(natural number) P. 15
律学(temperament) P. 3
律学因子 P. 56
律制(tuning system) P. 3
[M]
Madhuvanti,印度音阶型 P. 133
Madhyama(中间,中令,印度音名) P. 120
Mārvā,印度音阶型 P. 134
马基(Venkata makhi) P. 129
马普格(Friedrich Wilhelm Marpurg) P. 185
玛音阶(madhyāma-grāma) P. 121
玛音阶音系网 P. 123
慢宫调 P. 99
慢角调 P. 98
梅尔桑(Marin Mersenne) P. 180
美索不达米亚人(Mesopotamia) P. 135
米克索吕第亚调式(mixolydian) P. 162
米夏尔·施迪弗(Michael Stifil) P. 176
密优 P. 10
明徽 P. 100
民族音乐学 P. 32
缪天瑞 P. 203
模拟整数关系 P. 33
膜振动(Vibrating Membrane Instruments) P. 19
穆沙卡(Mikhael Mashaqa) P. 154
穆斯泰阿尔(musta' ār) P. 158
[N]
那瓦(Nawā)调式 P. 149
奈季迪(najdi) P. 156
奈季里兹(nagrīz) P. 157
南吕 P. 26
尼古拉·屈奎特(Nicolas Chuquet) P. 193
泥板书 P. 135
逆向推算 P. 209
[O]
欧拉(Léonhard Euler) P. 10
[P]
帕勒斯特里那(Giovanni P. Palestrina) P. 181
帕利斯卡(Palisca, Claude V.) P. 162
帕特肯代(Vishnu Narayan Bhatkhande) P. 133
Patdip,印度音阶型 P. 133
拍音(beating) P. 33
派生方式 P. 29
派生音程(derive interval) P. 28
潘达里卡(Pundarika) P. 133
频率(frequency) P. 4
频率比(frequency ratio) P. 4
频率比值(frequency rate) P. 4
Prem Lata Sharma P. 127
Pūrvī,印度音阶型 P. 134
品位(fret) P. 125
平面布局 P. 30
平均律半音 P. 10
平均律全音 P. 11
平均律四度 P. 186
平均律五度 P. 186
婆罗多(Bhärata) P. 120
普遍公式(common formula) P. 117
普通音差(comma common) P. 6
[Q]
七倍生律法 P. 34
七分七倍生律(7-limit rational system) P. 34
七分生律法 P. 34
七分之二音差中庸全音律($\frac{2}{7}$comma meantone temperament) P. 183
七声音阶(heptatonic scale) P. 25
齐特尔类琴 P. 16
气柱振动 P. 19
掐段长度 P. 135

掐段率 P. 121
钱乐之三百六十律 P. 27
亲缘关系 P. 30
秦腔苦音 P. 210
琴徽 P. 100
琴律 P. 84
琴律登记表 P. 209
琴律学 P. 84
琴五调 P. 92
清角 P. 25
清角为宫 P. 94
清角之调 P. 75
清商调 P. 95
清羽调 P. 95
丘琼荪 P. 69
裘锡圭 P. 44
趋匀观念 P. 57
趋匀性 P. 53
全音(whole tone) P. 20
全息信息量 P. 32
泉鸣调 P. 99
[R]
让·德穆里斯(Johannes de Muris) P. 169
蕤宾 P. 26
蕤宾调 P. 95
[S]
samvadin(《乐舞论》中的协和音程) P. 20
Shring, R. K. P. 127
Subhash Kak P. 127
Śūdra(普通音差) P. 127
萨菲丁(Ṣafī al-Dīn al-Urmawi) P. 142
萨瓦尔(Félix Savart) P. 10
萨音阶(ṣaḍjo-grāma) P. 121
萨音阶音系网 P. 122
萨兹卡尔(sāzkār) P. 157
塞巴(sabā) P. 157
三倍反生 P. 43
三重下属功能 P. 162
三、六度生律法(5-limit rational system) P. 28
三分三倍链 P. 31
三分三倍生律法(3-limit rational system, cycle-fifth system) P. 25
三分损一 P. 15
三分损益法 P. 16
三分损益律 P. 25
三分损益律半音音阶 P. 26
三分损益律十二律 P. 26
三分益一 P. 15
三分之一音差中庸全音律($\frac{1}{3}$comma mean-tone temperament) P. 183
三阶音列 P. 211
三全音(Tritone) P. 11
三十一平均律(31 equal temperament) P. 200
散声 P. 86
桑桐 P. 178
色彩性 P. 116
色育 P. 60
色育均 P. 62
山西中路梆子 P. 210
上暗徽 P. 100
上生 P. 41
舍哈尔贾赫(chahārgāh) P. 156
伸展样式 P. 31
沈括 P. 84
生律编号 P. 51
生律法 P. 4
生律方向 P. 50
生钟分 P. 57
审美价值 P. 33
审美联想 P. 4

声学(Acoustics) P. 3
十八律 P. 82
十二均八十四调 P. 82
十二律律名 P. 42
十二平均律(twelve-tone equal temperament) P. 27
十分法 P. 102
十进制带分数 P. 52
十品乌德 P. 138
十三倍生律(13-limit rational system) P. 36
十三分生律(13-limit rational system) P. 36
十三徽 P. 84
十四分之三音差中庸全音律($\frac{3}{14}$comma mean-tone temperament) P. 183
十一倍生律(11-limit rational system) P. 36
十一分生律(11-limit rational system) P. 36
实数 P. 59
食指品位(index finger fret) P. 136
数据分解 P. 58
数理规定性 P. 3
数理逻辑 P. 57
数理矛盾 P. 89
数理派 P. 159
数理通道 P. 211
数学(mathematics) P. 3
双轨推算 P. 11
双重量化 P. 194
双重基音论 P. 199
顺向推算 P. 209
斯基斯马(schisma) P. 200
斯连德若音阶(sléndro) P. 214
斯波索宾(Способин, N.) P. 127
斯鲁蒂(sruti) P. 120
斯台文(Stevin, Simon) P. 188
斯瓦洛(svara) P. 120
四倍波(fourfold wavelength) P. 22
四分音(quarter-tones) P. 140
四分音四音列(enharmonic tetrachord) P. 167
四分之三音(thire quarters-tones) P. 140
四分之一音差中庸全音律($\frac{1}{4}$comma mean-tone temperament) P. 181
四十一平均律(41-equal temperament) P. 200
四十三平均律(43-equal temperament) P. 200
四弦六品维纳 P. 129
苏美尔人(Sumerians) P. 135
算家立率 P. 119
算术级数(arithmetic progression) P. 176
算术中项(arithmetic mean) P. 188
娑楞伽提婆(Narada Śārngadeva) P. 123
[T]
Tōdī P. 134
塔尔蒂尼(Tartini, Giuseppe) P. 134
太簇 P. 15
特大全音、特大二度(Major tone) P. 24
特大中立二度 P. 33
特小三度(Minimal third) P. 24
体振动(Vibrating Instruments) P. 19
田边尚雄(Tanabe Hisao) P. 11
田中正平(Tanaka shohei) P. 200
调节律(Well temperament) P. 184
调节五度(well-tempered fifth) P. 184
调弦步骤 P. 95
调弦法 P. 102
听觉器官 P. 7
同功能变化半音 P. 6
同体双音 P. 43
同音协和(homophony consonancy) P. 108
同源变体论 P. 199
同主音综合 P. 32
托勒密(Ptolemy, Claudius) P. 55

托勒密品位(ptolemy fret) P.141
托勒密四音列(ptolemy tetrachord) P.161
托勒密小二度(Ptolemy minor secondd) P.139
[V]
Vaiśya(纯律大半音) P.127
Vivadin(《乐舞论》中的不协和音程) P.120
[W]
完美数列(perfect senario) P.176
王光祈 P.59
王朴 P.80
王子初 P.210
微观量度 P.18
韦克迈斯特(Andreas Werckmeister) P.185
韦昭 P.84
唯物主义(materialism) P.197
唯心主义(mentalism) P.197
维纳(vīnāj) P.121
乌德(Ud) P.135
乌沙克(Uschāq)调式 P.149
无理数(irrational number) P.185
无名指品位(ring finger fret) P.137
无射 P.26
五倍波(quintupling wavelength) P.196
五度狼音(wolf-fifth) P.183
五度链(fifth-chain) P.45
五度相生大六度(major sixth) P.36
五度相生大三度(major third) P.11
五度相生律(System of tuning in perfect fifths) P.25
五度相生小七度(minor seventh) P.27
五度相生小三度(minor third) P.27
五分五倍对称 P.31
五分五倍生律法(5-limit rational system) P.54
五分之一音差中庸全音律($\frac{1}{5}$comma mean-tone temperament) P.183
五声调式结构(pentatonic mode) P.42
五十三纯律(53-tones just intonation) P.200
五十三平均律(53 equal temperament) P.200
伍麦叶王朝时期(公元661~750年) P.135
物理学(physics) P.3
物理属性 P.3
[X]
西卡赫(sikāh) P.156
希贾济(hijāzī) P.157
希贾济(Hijāzī)调式 P.153
下暗徵 P.100
下多里亚调式(hydorian) P.166
下方共振(under-syntony) P.34
下方共振沉音列、沉音列(undertone series,共泛音音列) P.34
下弗里吉亚调式(hyphrygian) P.165
下吕第亚调式(hylydian) P.165
下生 P.41
下徵调 P.43
下徵调法 P.75
下属功能性质 P.27
下属音上方自然七度 P.35
弦律 P.43
弦律器 P.60
弦振动(chordophone) P.19
现象描述 P.6
相对波长(relative wavelength) P.12
相对弦长(relative length) P.16
相对音高(relative pitch height) P.12
相邻中指(neighbor middle finger) P.138
小半音(minor semitone) P.27
小全音(minor tone) P.24
小三和弦 P.34
小三和弦双重基音理论 P.195
小微音差(semicomma minime) P.27

协和(consonancy) P.3
协同音音差(syntonic comma) P.159
斜向线段 P.31
谐音(partial tone) P.4
谐音号数(harmonic tone sequence number) P.4
谐音简比关系 P.214
谐音列(harmonic tone series) P.4
心理物理学(psychophysics) P.7
欣德米特(Paul Hindemith) P.34
新法密率 P.27
形式主义(formalism) P.197
形态分析 P.32
徐理 P.101
徐琪 P.91
徐上瀛 P.102
旋宫 P.49
旋律绕行 P.33
荀勖 P.68
[Y]
雅乐"正声"七声音阶 P.26
亚利斯多德(Aristotle) P.161
亚述人(Assyria) P.135
演绎律 P.125
阳链、一次低列 P.46
阳仪 11 化跃迁算子 P.212
阳仪 13 化跃迁算子 P.211
阳仪表述 P.211
杨没累 P.202
杨荫浏 P.74
伊拉克(Irāq)调式 P.150
伊斯法汉(Isfahān)调式 P.151
伊斯兰教(Moslernism, Islamism) P.135
夷则 P.26
夷则调 P.99
亿兆 P.65
阴链、一次高列 P.47
阴阳观念 P.47
阴仪 11 化跃迁算子 P.211
阴仪 13 化跃迁算子 P.211
阴仪表述 P.211
音(tone, sonance) P.4
音程(interval) P.3
音程计量 P.7
音程系数(intervallic coefficient) P.3
音程系数的倒数 P.3
音程值(intervallic value) P.6
音分(cent) P.10
音阶(scale) P.4
音阶型(scale type) P.133
音律测定 P.201
音乐学(musicology) P.3
应用律学 P.51
应有勤 P.214
应钟 P.26
有理数(rational number) P.33
有效弦长 P.17
有效振动段 P.122
羽调类色彩音 P.211
羽管键琴(harpsichord) P.179
元差(original comma) P.61
约翰·纳皮尔(John Napier) P.193
约瑟夫·芒佐(Joseph L Monzo) P.185
约瑟夫·索维尔(Joseph Sauveur) P.194
约数 P.52
岳山(nut) P.86
[Z]
跃程值(transitional intervallic value) P.14
跃迁算子(transition operator) P.14
再里亚布(Ziryab) P.137
赞库莱(Zenkūla)调式 P.152

曾侯乙编钟铭文 P.42
增二度(augmented second) P.27
增六度(augmented sixth) P.27
增六和弦(augmented sixth chord) P.56
增三和弦(augmented triad) P.56
扎尔扎尔(Mansūr Zalzal al-Dārib) P.138
扎尔扎尔中指 P.138
扎利诺(Giosephe Zarlino) P.173
扎维尔(zāwil) P.158
赵宋光 P.3
摺纸法 P.85
真分数(proper fraction) P.3
真数(real number) P.6
振动频率(frequency) P.4
振动源 P.198
振动周期(cyc. of vibrancy) P.3
徵调类色彩音 P.210
整数(whole number) P.15
整数比(whole number rate) P.4
正调 P.91
正宫调指法 P.75
正律器 P.84
正声调法 P.69
郑荣达 P.80
郑译 P.25
指板(fingerplate) P.121
执始 P.61
指数 P.8
指位组合 P.146
质底幂积 P.51
质数(prime number) P.23
质数 11 P.23
质数 13 P.23
质数 17 P.23
质数 19 P.23
质数 3 P.23
质数 5 P.23
质数 7 P.23
中国传统哲学 P.46
中立二度(neutral second) P.33
中立六度(neutral sixth) P.138
中立三度(neutral third) P.138
中立音(neutral-tones) P.133
中立音调式音阶(neutral-tone scale) P.144
中立音徵调式 P.210
仲吕 P.26
重量比值(weight rate) P.160
周期比值(cyc. of vibrancy rate) P.17
主观感受 P.7
主音上方自然七度 P.35
朱熹 P.85
朱载堉 P.116
朱载堉新法密率(十二平均律) P.27
诸率之母 P.118
属七和弦(dominant seventh chord) P.34
属音上方自然七度 P.35
自然半音(diatonic semi-tone) P.6
自然大调音阶(natural major scale) P.28
自然音程 P.25
自然七度(natural seventh) P.34
自然七声音阶(natural heptatonic scale) P.28
自然数(natural number) P.34
自然四音列(diatonic tetrachord) P.160
自然小调音阶(natural minor scale) P.28
自然音程(diatonic interval) P.22
自然音级(diatomic progression) P.132
自然原理(natural principle) P.178
纵向传承发展 P.214
最大音差(comma maxima) P.27
颤曾体系 P.43

附录三　音分/频率对照表

使用说明

1. 本表以十二平均律为标准
2. 国际标准音 a^1（小字 1 组 a）= 440Hz
3. 本表仅给出小字 1 组 $c^1 - b^1$ 的频率数，其他八度组按倍半频率关系求得。

c^1				$^{\#}c^1$			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
0	261.630	50	269.296	100	277.187	150	285.310
1	261.781	51	269.452	101	277.347	151	285.474
2	261.932	52	269.608	102	277.508	152	285.639
3	262.084	53	269.763	103	277.668	155	285.804
4	262.235	54	269.919	104	277.829	154	285.970
5	262.387	55	270.075	105	277.989	155	286.135
6	262.538	56	270.231	106	278.150	156	286.300
7	262.690	51	270.387	107	278.310	157	286.465
8	262.842	58	270.544	108	278.471	158	286.631
9	262.994	59	270.700	109	278.632	159	286.797
10	263.146	60	270.856	110	278.793	160	286.962
11	263.298	61	271.013	111	278.954	161	287.128
12	263.450	62	271.169	112	279.115	162	287.294
13	263.602	63	271.326	113	279.277	163	287.460
14	263.754	64	271.483	114	279.438	164	287.626
15	263.907	65	271.640	115	279.560	165	287.792
16	264.059	66	271.797	116	279.761	166	287.959
17	264.212	67	271.954	117	279.923	167	288.125
18	264.364	68	272.111	118	280.084	168	288.291
19	264.517	69	272.268	119	280.246	169	288.458
20	264.670	70	272.425	120	280.408	170	288.625
21	264.823	71	272.583	121	280.570	171	288.791
22	264.976	72	272.740	122	280.732	172	288.958
23	265.129	73	272.898	123	280.894	173	289.125
24	265.282	74	273.056	124	281.057	174	289.292
25	265.435	75	273.213	125	281.220	175	289.459
26	265.589	76	273.371	126	281.382	176	289.627
27	265.742	77	273.529	127	281.544	177	289.794
28	265.896	78	273.687	128	281.707	178	289.961
29	266.049	79	273.845	129	281.870	179	290.129
30	266.203	80	274.004	130	282.032	180	290.297
31	266.357	81	274.162	131	282.195	181	290.464
32	266.511	82	274.320	132	282.358	182	290.632
33	266.665	83	274.479	133	282.522	183	290.800
34	266.819	84	274.637	134	282.685	184	290.968
35	266.973	85	274.796	135	282.848	185	291.136
36	267.127	86	274.955	136	283.012	186	291.304
37	267.282	87	275.114	137	283.175	187	291.473
38	267.436	88	275.273	138	283.339	188	291.641
39	267.590	89	275.432	139	283.502	189	291.810
40	267.745	90	275.591	140	283.666	190	291.978
41	267.900	91	275.750	141	283.830	191	292.147
42	268.055	92	275.909	142	283.994	192	292.316
43	268.210	93	276.069	143	284.158	193	292.485
44	268.365	94	276.228	144	284.322	194	292.654
45	268.520	95	276.388	145	284.487	195	292.823
46	268.675	96	276.548	146	284.651	196	292.992
47	268.830	97	276.707	147	284.816	197	293.161
48	268.985	98	276.867	148	284.980	198	293.331
49	269.141	99	277.027	149	285.145	199	293.500
50	269.296	100	277.187	150	285.310	200	293.670

d¹				#d¹			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
200	293. 670	250	302. 275	300	311. 132	350	320. 249
201	293. 840	251	302. 450	301	311. 312	351	320. 434
202	294. 009	252	302. 624	302	311. 492	352	320. 619
205	294. 179	253	302. 799	303	311. 672	353	320. 805
204	294. 349	254	302. 974	304	311. 852	354	320. 990
205	294. 519	255	303. 149	305	312. 032	355	321. 175
206	294. 689	256	303. 324	306	312. 212	356	321. 361
207	294. 860	257	303. 450	307	312. 393	357	321. 547
208	295. 030	258	303. 675	308	312. 573	358	321. 732
209	295. 200	259	303. 850	309	312. 754	359	321. 918
210	295. 371	260	304. 026	310	312. 935	360	322. 104
211	295. 542	261	304. 201	311	313. 115	361	322. 290
212	295. 712	262	304. 377	312	313. 296	362	322. 477
213	295. 883	263	304. 553	313	313. 477	363	322. 663
214	296. 054	264	304. 729	314	313. 658	364	322. 849
215	296. 225	265	304. 905	315	313. 840	365	323. 036
216	296. 396	266	305. 081	316	314. 021	366	323. 223
217	296. 568	267	305. 258	317	314. 202	387	323. 409
218	296. 739	268	305. 434	318	314. 384	368	323. 596
219	296. 910	269	305. 611	319	314. 566	369	323. 783
220	297. 082	270	305. 787	320	314. 747	370	323. 970
221	297. 257	271	305. 964	321	314. 929	371	324. 157
222	297. 425	272	306. 141	322	315. 111	372	324. 345
223	297. 597	273	306. 318	323	315. 293	373	324. 532
224	297. 769	274	306. 495	324	315. 476	374	324. 720
225	297. 941	275	306. 672	325	315. 658	375	324. 907
226	298. 113	276	306. 849	326	315. 840	376	325. 095
227	298. 286	277	307. 026	327	316. 023	377	325. 283
228	298. 458	278	307. 203	328	316. 205	378	325. 471
229	298. 630	279	307. 381	329	316. 388	379	325. 659
230	298. 803	280	307. 559	330	316. 571	380	325. 847
231	298. 976	281	307. 736	331	316. 754	381	326. 035
232	299. 148	282	307. 914	332	316. 937	382	326. 224
233	299. 321	283	308. 092	333	317. 120	383	326. 412
234	299. 494	284	308. 270	334	317. 303	384	326. 601
235	299. 667	285	308. 448	335	317. 486	385	326. 789
236	299. 840	286	308. 626	336	317. 670	386	326. 978
237	300. 014	287	308. 805	337	317. 853	387	327. 167
238	300. 187	288	308. 983	338	318. 037	388	327. 356
239	300. 360	289	309. 162	339	318. 221	389	327. 545
240	300. 534	290	309. 340	340	318. 405	390	327. 735
241	300. 708	291	309. 519	341	318. 589	391	327. 924
242	300. 881	292	309. 698	342	318. 773	392	328. 113
243	301. 055	293	309. 877	343	318. 957	393	328. 303
244	301. 229	294	310. 056	344	319. 141	394	328. 493
245	301. 403	295	310. 235	345	319. 326	395	328. 683
246	301. 577	296	310. 414	346	319. 510	396	328. 872
247	301. 752	297	310. 594	347	319. 695	397	329. 062
248	301. 926	298	310. 773	348	319. 879	398	329. 253
249	302. 100	299	310. 953	349	320. 064	399	329. 443
250	302. 275	300	311. 132	350	320. 249	400	329. 633

e¹				f¹			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
400	329.633	450	339.292	500	349.234	550	359.467
401	329.824	451	339.488	501	349.436	551	359.675
402	330.014	452	339.684	502	349.638	552	359.883
403	330.205	453	339.881	503	349.840	553	360.091
404	330.396	454	340.077	504	350.042	554	360.299
405	330.587	455	340.273	505	350.244	555	360.507
406	330.778	456	340.470	506	350.447	556	360.715
407	330.969	457	340.667	507	350.649	557	360.924
408	331.160	458	340.864	508	350.852	558	361.132
409	331.351	459	341.061	509	351.054	559	361.341
410	331.543	460	341.258	510	351.257	560	361.550
411	331.734	461	341.455	511	351.460	561	361.759
412	331.926	462	341.652	512	351.663	562	361.968
413	332.118	463	341.849	513	351.866	563	362.177
414	332.310	464	342.047	514	352.070	564	362.386
415	332.502	465	342.245	515	352.273	555	362.596
416	332.694	466	342.442	516	352.477	566	362.805
417	332.886	467	342.640	517	352.680	567	363.015
418	333.078	468	342.838	518	353.884	568	363.224
419	333.271	469	343.036	519	353.088	569	363.434
420	333.463	470	343.235	520	353.292	570	363.644
421	333.656	471	343.433	521	353.496	571	363.854
422	333.849	472	343.631	522	353.706	572	364.065
423	334.042	473	343.830	523	353.905	573	364.275
424	334.235	474	344.028	524	354.109	574	364.485
425	334.428	475	344.227	525	354.314	575	364.696
426	334.621	476	344.426	526	354.519	576	364.907
427	334.814	477	344.625	527	354.723	577	365.118
428	335.008	478	344.824	528	354.928	578	365.329
429	335.201	479	345.024	529	355.133	579	365.540
430	335.395	480	345.223	530	355.339	580	365.751
431	335.589	481	345.422	531	355.544	581	365.962
432	335.783	482	345.622	532	355.749	582	366.173
433	335.977	483	345.822	533	355.955	583	366.385
434	336.171	484	345.021	534	356.161	584	366.597
435	336.365	485	346.221	535	356.366	585	366.809
436	336.559	486	346.421	536	356.572	586	367.021
437	336.754	487	346.622	537	356.778	587	367.233
438	336.948	488	346.822	538	356.984	588	367.445
439	337.143	489	347.022	539	357.101	589	367.657
440	337.338	490	347.223	540	357.397	590	367.870
441	337.533	491	347.423	541	357.604	591	368.082
442	337.728	492	347.624	542	357.810	592	368.295
443	337.923	493	347.825	543	358.017	593	368.508
444	338.118	494	348.026	544	358.224	594	368.721
445	338.314	495	348.227	545	358.431	595	368.934
446	338.509	496	348.428	546	358.638	596	369.147
447	338.705	497	348.629	547	358.845	597	369.360
448	338.900	498	348.831	548	359.052	598	369.573
449	339.096	499	349.032	549	359.260	599	360.787
450	339.292	500	349.234	550	359.467	600	370.001

$^{\#}f^{1}$				g^{1}			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
600	370.001	650	380.843	700	392.002	750	403.489
601	370.214	651	381.063	701	392.229	751	403.722
602	370.428	652	381.283	702	392.455	752	403.955
603	370.642	653	381.503	703	392.682	753	404.188
604	370.857	654	381.723	704	392.909	754	404.422
605	371.071	655	381.944	705	393.136	755	404.656
606	371.285	656	382.165	706	393.363	756	404.889
607	371.500	657	382.386	707	393.590	757	405.123
608	371.714	658	382.606	708	393.818	758	405.357
609	371.929	659	382.828	709	394.045	759	405.592
610	372.144	660	383.049	710	394.273	760	405.826
611	372.359	661	383.270	711	394.501	761	406.060
612	372.574	662	383.492	712	394.729	762	406.295
613	372.790	663	383.713	713	394.957	763	406.530
614	373.005	664	383.935	714	395.185	764	406.765
615	373.220	665	384.157	715	395.413	765	407.000
616	373.436	666	384.379	716	395.642	766	407.235
617	373.652	667	384.601	717	395.870	767	407.470
618	373.868	668	384.823	718	396.099	768	407.706
619	374.084	669	385.045	719	396.328	789	407.941
620	374.300	670	385.268	720	396.557	770	408.177
621	374.516	671	385.490	721	396.786	771	408.413
622	374.733	672	385.713	722	397.015	772	408.649
623	374.949	673	385.936	723	397.245	773	408.885
624	375.166	674	386.159	724	397.474	774	409.121
625	375.382	675	386.382	725	397.704	775	409.357
626	375.599	676	386.605	726	397.934	776	409.594
627	375.816	677	386.829	727	398.164	777	409.831
628	376.034	678	387.052	728	398.394	778	410.067
629	376.251	679	387.276	729	398.624	779	410.304
630	377.468	680	387.500	730	398.854	780	410.541
631	376.686	681	387.723	731	399.085	781	410.779
632	376.903	682	387.947	732	399.315	782	411.016
633	377.121	683	388.172	733	399.546	783	411.254
634	377.339	684	388.396	734	399.777	784	411.491
635	377.557	685	388.620	735	400.008	785	411.729
636	377.775	686	388.845	736	400.239	786	411.967
637	377.993	687	389.070	737	400.470	787	412.205
638	378.212	688	389.294	738	400.702	788	412.443
639	378.430	689	389.519	739	400.933	789	412.681
640	378.649	690	389.744	740	401.165	790	412.920
641	378.868	691	389.970	741	401.396	791	413.158
642	379.087	692	390.195	742	401.628	792	413.397
643	379.306	693	390.420	743	401.860	793	413.636
644	379.525	694	390.646	744	402.093	794	413.873
645	379.744	695	390.872	745	402.325	795	414.114
646	379.964	696	391.097	746	402.557	796	414.353
647	380.183	697	391.323	747	402.790	797	414.593
648	380.403	698	391.550	748	403.023	798	414.832
649	380.623	699	391.776	749	403.256	799	415.072
650	380.843	700	392.002	750	403.489	800	415.312

$^{\#}a^{1}$				b^{1}			
音分	频率	音分	频率	音分	频率	音分	频率
800	415.312	850	427.481	900	440.007	950	452.901
801	415.552	851	427.728	901	440.262	951	453.162
802	415.792	852	427.975	902	440.516	952	453.424
803	416.032	853	428.223	903	440.771	953	453.686
804	416.272	854	428.470	904	441.025	954	453.948
805	416.513	855	428.718	905	441.280	955	454.211
806	416.754	856	428.965	906	441.535	956	454.473
807	416.994	857	429.213	907	441.790	957	454.736
808	417.235	858	429.709	908	442.045	958	454.998
809	417.476	859	429.958	909	442.301	959	455.261
810	417.718	860	430.206	910	442.556	960	455.524
811	417.959	861	430.455	911	442.812	961	455.787
812	418.200	862	430.703	912	443.068	962	456.051
813	418.442	863	430.952	913	443.324	963	456.314
814	418.684	864	431.201	914	443.580	964	456.578
815	418.926	865	431.450	915	443.836	965	456.842
816	419.168	866	429.709	916	444.093	966	457.106
817	419.410	867	431.700	917	444.349	967	457.370
818	419.652	868	431.949	918	444.606	968	457.634
819	419.895	869	432.199	919	444.863	969	457.899
820	420.138	870	432.448	920	445.120	970	458.163
821	420.380	871	432.698	921	445.377	971	458.428
822	420.623	872	432.948	922	445.635	972	458.693
823	420.866	873	433.198	923	445.892	973	458.958
824	421.109	874	433.449	924	446.150	974	459.223
825	421.353	875	433.699	925	446.406	975	459.488
826	421.596	876	433.950	926	446.665	976	459.754
827	421.840	877	434.200	927	446.924	977	460.019
828	422.083	878	434.451	928	447.182	978	460.285
829	422.327	879	434.702	929	447.440	979	460.551
830	422.571	880	434.954	930	447.699	980	460.817
831	422.815	881	435.205	931	447.957	981	461.083
832	423.060	882	435.456	932	448.216	982	461.350
833	423.304	883	435.708	933	448.475	983	461.616
834	423.549	884	435.960	934	448.734	984	461.883
835	423.793	885	436.212	935	448.994	985	462.150
836	424.038	886	436.464	936	449.253	986	462.417
837	424.283	887	436.716	937	449.513	987	462.684
838	424.528	888	436.968	938	449.772	988	462.952
839	424.774	889	437.221	939	450.032	989	463.219
840	425.019	890	437.473	940	450.292	990	463.487
841	425.265	891	437.726	941	450.552	991	463.755
842	425.510	892	437.979	942	450.813	992	464.022
843	425.756	893	438.232	943	451.073	993	464.291
844	426.002	894	438.485	944	451.334	994	464.559
845	426.248	895	438.739	945	451.595	995	464.827
846	426.495	896	438.992	946	451.855	996	465.096
847	426.741	897	439.246	947	452.117	997	465.365
848	426.988	898	439.499	948	452.378	998	465.633
849	427.234	899	439.753	949	452.639	999	465.902
850	427.481	900	440.007	950	452.901	1000	466.172

附录四　参考资料（Bibliographies）

古籍资料：（以成书年代为序）

《管子》注释本，孙波注释，华夏出版社，北京2000年5月第1版。

《吕氏春秋》高诱注，上海古籍出版社影印本，1988年出版。

《淮南子·卷三·天文训》，《诸子集成》第7卷第35页，上海书店影印出版　1986年7月第1版，1991年第6次印刷。

《史记·律书》，《历代乐志律志校释》第一分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社1999年9月北京版。

《后汉书·卷九十一·律历志上》，《二十五史》，上海古籍出版社。

《宋书·律志》，《历代乐志律志校释》第二分册，丘琼荪校释，人民音乐出版社1999年北京版。《隋书·卷十六·律历志》，《二十五史》，上海古籍出版社。

《旧五代史·卷一百四十四·志七·乐志下》，《二十五史》，上海古籍出版社。

《碣石调·幽兰》《琴曲集成》（一），中华书局1980年影印本。

《琴籍·明徽暗徽法》晚唐陈拙撰，见《琴书大全》

《梦溪笔谈》，沈括撰。

《朱子大全集·卷六十六·琴律说》，约1190年，抄本。

《琴统·十则》，1268年成书，徐理撰。见《西麓堂琴统·琴声卷一》。

《琴苑要录》，宋人辑，明代抄本，1925年冯水据铁琴铜剑楼藏本再抄。

《宋史·乐志》，《二十五史》，上海古籍出版社。

《太音大全集》成书于1413年以前，据北大图书馆藏明刊本影印。

《神奇秘谱》，成书于1425年，朱权辑，明刻本影印本。

《风宣玄品》成书于1539年，明徽藩朱厚爝辑刊。

《西麓堂琴统》成书于1549年。明刻本，明杨嘉森所辑的琴谱专集。

《琴书大全》，万历庚寅年（1590年）刊本

《律学新说》，[明]朱载堉撰，冯文慈点注，人民音乐出版社出版　1986年9月北京版。

《律吕精义》，[明]朱载堉撰，冯文慈点校本，人民音乐出版社1998年7月北京版。

《五知斋琴谱》徐琪编，康熙六十年（1721年）首次刊印，本文引自雍正二年（1724年）红杏山房藏版影印版

《琴学入门》成书于1864年，同治三年刻本。

近现代资料：（以著者姓氏汉语拼音首位字母为序）

专著及文集：

［日］岸边成雄 郎樱译《伊斯兰音乐的乐器与音乐理论》，《音乐学丛刊》第 1 辑，文化艺术出版社 1981 年版。

陈应时《中国乐律学探微》，上海音乐学院音乐出版社 2004 年 2 月版。

崔宪《曾侯乙编钟钟铭校释及律学研究》（中国传统文化研究丛书），人民音乐出版社 1997 年 9 月北京版。

戴念祖《中国声学史》，湖南教育出版社 2001 年 9 月版。

Habib Hassan Touma，金经言译，王昭仁校《十九世纪的阿拉伯音乐》，载《十九世纪东方音乐文化》（Musikkulturen Asiens，Afrikas und Ozeaniens im 19. Jahrhundert）［德］罗伯特·金特编，中国文联出版公司 1985 年北京版。

韩宝强《音的历程》，中国文联出版社，2003 年 5 月版。

黄翔鹏《溯流探源——中国传统音乐研究》论文集，人民音乐出版社 1993 年 2 月北京版。

　　《中国人的音乐和音乐学》（中国音乐学研究文库），山东文艺出版社 1997 年 3 月版。

李玫《“中立音”音律现象的研究》，2000 年度博士论文，上海音乐学院音乐出版社 2005 年 8 月版。

缪天瑞《律学》万叶书店，1950 年 3 月初版，1963 年人民音乐出版社修订版，1983 年人民音乐出版社增订版，1996 年 1 月人民音乐出版社第三次修订版。

王光祈《王光祈音乐论著选集》上册，人民音乐出版社 1993 年北京版。

　　《王光祈音乐论著选集》下册，冯文慈、俞玉滋选注，人民音乐出版社 1993 年 1 月北京版。

王子初《荀勖笛律研究》（中国传统文化研究丛书），人民音乐出版社 1995 年 11 月北京版。

杨荫浏《杨荫浏音乐论文选集》，上海文艺出版社 1986 年 6 月版。

赵宋光：《赵宋光文集》第二卷，广州花城出版社 2001 年版。

论文：

陈应时

1983：《论证中国古代的纯律理论》，《中央音乐学院学报》第 1 期，第 34－39 页。

1984：《律学研究刍议》，《中国音乐》第 2 期，第 45－46 页。

1984：《“〈淮南子〉律数”之迷》，《乐府新声》第 3 期，第 31－33 页。

1985：《王朴律究竟是一种什么律》，《交响》第 2 期，第 19－24 页。

1987：《中国古代文献记载中的“律学”》，《中国音乐》第 2 期，第 11－16 页。

1989：《再谈王朴律——兼答王子初同志》，《交响》第 2 期，第 1－5 页。

陈其射

1985：《解放后我国律学研究简介》，《中国音乐史学习参考资料》7 月。

1986：《试论我国早期律学思维》，《阜阳师范学院学报》第 3 期，第 72－82 页。

程云

1986：《繁难的理论与多彩的实践——也算参与“七平均律”的讨论》，《民族民间音乐》第4期。

戴念祖

1980：《古代编钟发音的物理特性》，《百科知识》第8期，第68页。

韩宝强

1985：《论陕西民间音乐的律制》，《学习与研究》第2期，第4－11页。

何昌林

1983：《论“纯律化”》，《乐府新声》第4期，第13－16页。

黄翔鹏

1979：《先秦音乐文化的古乐器——曾侯乙墓古乐器》，《文物》7期，第32－39页。

1981：《曾侯乙钟磬铭文乐学体系初探》，原载《音乐研究》第1期，现收入《溯流探源——中国传统音乐研究》论文集，人民音乐出版社1993年2月北京版。第128－180页。

1989：《均钟考》，原载《黄钟》第1、2期，现收入个人文集《中国人的音乐和音乐学》（中国音乐学研究文库），山东文艺出版社1997年3月版，第175－214页。

1989：琴律《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》，中国大百科全书出版社第1版，第529－531页。

姜夔

1985：《蒙古族民歌中羽调式的律制特点》，《中央音乐学院学报》第2期，第44－45页。

1986：《湖南花鼓戏〈刘海砍樵〉头段的律制特点》，《中央音乐学院学报》第3期，第32－33页。

吕自强

1985：《琵琶旧七品和中立音》，《中国音乐》第1期，第48－50页。

1986：《音律理论和音乐实践》，《交响》第1期，第1－11页。

桑桐

1989：和声学条目，《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》，中国大百科全书出版社第1版，第266－268页。

王子初

1987：《也谈王朴律——兼与陈应时同志商榷》，《交响》第1期，第18－20页。

吴犇

1986：《传统琵琶的特殊品位对乐曲的影响》，《中国音乐》第2期，第50－52页。

杨没累

1929：《淮南子的乐律学》，《没累文存》泰乐图书局民国18年（1929年）版，第1－77页。

杨荫浏

1948：《七弦琴徽分之位置与其音程比值》原载《礼乐》第1期。《杨荫浏音乐论文选集》，

上海文艺出版社 1986 年版，第 163－171 页。
1958：《谈琵琶音律》，《民族音乐论文集》（第三集）第 9－14 页，音乐出版社 1958 年版。
1979：《管律辨讹》，原载《文艺研究》第 4 期，现收入《杨荫浏音乐论文选集》，上海文艺出版社 1986 年 6 月版。第 385－395 页。
1982：《三律考》，原载《音乐研究》第 1 期，现收入《杨荫浏音乐论文选集》，上海文艺出版社 1986 年 6 月版。第 394－405 页。
应有勤
1987：《口弦音律与民族音体系》，《民族音乐》第 2 期。
1987：《论东方民族乐律的不确定性》，《中国音乐学》第 3 期，第 8－20 页。
1997：《重新认识甘美兰的斯连德若音阶》，载《中国音乐学》第 2 期第 5－18 页、第 3 期第 107－124 页。
赵宋光：
1982：《关于$\frac{3}{4}$音的律学假设》，原载《中央音乐学院学报》第 2 期，第 8－12 页，现收入《赵宋光文集》第二卷，广州花城出版社 2001 年版，第 340－351 页。
1984：《理论律学的基本方法》，原载《音乐艺术》第 3 期，现收入《赵宋光文集》第二卷，广州花城出版社 2001 年版，第 300－314 页。
1986：《中华律学传统的复兴与开拓》，原载《中国音乐学》第 3 期，现收入《赵宋光文集》第二卷，广州花城出版社 2001 年版，第 291－299 页。
1987：《律学研究中的微言大义》，《音乐艺术》第 4 期，第 37－40 页。
1989：合作撰稿人韩宝强，律学，《中国大百科全书·音乐舞蹈卷》，中国大百科全书出版社第 1 版第 403－407 页。
1993：《一笔恼人遗产的松快清理》，原载《音乐研究》第 3 期，现收入《赵宋光文集》第二卷，广州花城出版社 2001 年版，第 359－386 页
2001：《借助数理为音乐回归自然辨明航向》，2001 年春在广东省艺术中专的讲座讲义，现收入《赵宋光文集》第二卷，第 403－407 页。
2001：《七弦琴定弦过程数学方程的建立与求解》，载《中央音乐学院学报》第 3 期第 26－37 页。
2001《古琴徽分的顺逆推算》，载《音乐艺术》第 4 期第 34－39 页。
郑荣达
1987：《淮南律辩——评〈淮南子〉在历史中的作用》，《黄钟》第 1 期，第 29－35 页
1989：《王朴密率解》，《黄钟》第 3 期，第 1－8 页。
中国艺术研究所、新疆艺术研究所
1986：《“新疆维吾尔族音乐乐律与调式问题讨论会”测音工作报告》，《新疆艺术》第 5 期。
朱之屏
1980：《从泛音对湖南民歌的影响谈起》，《音乐论丛》第 3 辑。

外文资料：（按人名首位字母为序）

Bharata 婆罗多 GHOSH. M.，Translator

1961：*The Natyasastra*（《乐舞论》，公元前2世纪成书），Volume 2，Bibliotheca India，The Asiatic Society，Calcutta，India.）

BLUM，S. P. BOHLMAN，V. and NEUMAN，D.（editors）

1993：*Ethnomusicology and Modern Music History* Urbana and Chicago：University of Illinois Press

BOHLE，Bruce（editor）

The International Cyclopedia of Music and Musicions 第十版，65－91Oscar Thompson（1887～1945）主编；Nicolas Slonimsk 编第五至八版；Robert Sabin 编第九版。

FARMER，H. G.

1957：*The Music of Islam*，*In New Oxford History of Music*，Volume 1：*Ancient and Oriental Music*，E. Wellesz，Editor，Oxford University Press，London，England

1965：*The Sources of Arabian Music*，E. J. Brill，Leiden，Netherlands.

OETTINGEN，Arthur Joachim von 厄汀恩

1913：*DAS DUALE HARMONIE SYSTEM* Leipzig 1913，Verlag von C. F. W. Siegel's Musikalienhandlung（《和声学的二元体系》莱比锡 西格尔音乐书店 1913 年出版）。

RACY，Ali Jihad

1993：*Historical Worldviews of Early Ethnomusicologists*：*An East-West Encounter in Cairo*，*1932*（早期民族音乐学家的世界音乐史观：东方遭遇西方，1932 年在开罗）in BLUM，S. P.

REUTER，Fritz

1952：*Praktiche Harmonik des* 20. *Jahrhunderts*（《20 世纪的实用和声技法》），MITTELDEUTSCHER VERLAG HALLE（中部德意志出版社〈哈雷〉成书于 1952 年夏）

STEVIN，Simon

1955～1966：*Vande Spiegheling der Singconst*（Dutch，《歌唱艺术的理论》成书于 16 世纪末，发表于 1884 年）Adriaan Fokker 译"*On the theory of the art of singing*"，In Principal Works of Simon Stevin vol. 5，pp. 415－464（《西蒙·斯台文文集第五卷》）Adriaan Fokker 辑，阿姆斯特丹 1955－1966 年

THOMAS D. ROSSING

1982：*The Science of Sound*，1982 年美国 Reading（Mas）Addison-Wesley 有限出版公司出版。

POWERS，Harold S.

1980：*The New Grove Dictionary of Music and Musicians/India*

WRIGHT，O.

1980：*The New Grove Dictionary of Music and Musicians/Arab*

电子版本：

BOR，Joep editor，Suvarnalata Rao，Wim van der Meer，Jane Harvey co-authors

The Raga Guide：*Raga classification*（拉格分类法），

http：//www. wyastone. co. uk/nrl/world/raga/intro3. html（2004～）

Baroque Temperament：

http：//plaza. ufl. edu/wnb/baroque_ temperament. htm

FORSTER，Cris.

2005：*Musical Mathematics*：*A Practice in the Mathematics of Tuning Instruments and Analyzing Scales*（《音乐数学：在调律与音律分析中的运用》）见．chrysalis 基金会网页 http：//www. chrysalis-foundation. org（2000～）

MOZON，Joe

2000：*JustMusic*：*A NEW HARMONY*，http：//tonalsoft. com/enc/encyclopedia. aspx（2004～）

PALISCA，Claude V.

1973：MUSIC AND SCIENCE（音乐与科学）Dictionary of the History of Ideas（《思想史辞典》）Vol. 3，Charles Scribner's Sons，New York，in 1973－74. 此处使用该版本的电子版，自 The Electronic Text Centerat the University of Virginia Library

SUBHASH，Kak

2003：*Early Indian Music*，*in A Search in Asia for a New Theory of Music*，Jose S. Buenconsejo（editor），Center for Ethnomusicology，Univ of Philippines，pages 59－76.）

Wikipedia，the free encyclopedia（维基自由百科）http：//en. wikipedia. org（2004～）

第二手资料：

Ramamatya 著，Aiyar，M. S. R. ，Translator（英译）

1932：*Svaramelakalanidhi*（梵文，《音乐之本》，公元 16 世纪），The Annamalai University，India Śārngadeva，Narada 著，Shringy，R. K. ，and Sharma，P. L. ，Translators 转引自 Forster，Cris. *Musical Mathematics*：*A Practice in the Mathematics of Tuning Instruments and Analyzing Scales.*

Sangīta-Ratmākara（《乐海》，13 世纪），Volume 1，Motilal Banarsidass，Delhi，India. 转引自 Forster，Cris. *Musical Mathematics*：*A Practice in the Mathematics of Tuning Instruments and Analyzing Scales.*

附录五　保护无形文化遗产还需建立文化结构形态的系统化研究[①]

李　玫

当我们讨论文化艺术遗产保护时，多半是指那些能看得见、摸得着的有形遗产。这种保护对象的价值以及保护措施的投资易于评估、预算，通过保护计划，文化遗产的资产利润也是可预测并可以实现的，因而也就容易引起社会各界的关注及资助。政府和社会团体及国际组织都有长期和系统的保护及重建资助计划。

然而，依附于个人存在、身口相传的非物质形态的遗产，即无形文化遗产则通常被忽视而面临严重困境，甚至即使对这部分遗产付诸关注也仍然难逃困境。

联合国教科文组织对人类口头的、无形文化遗产的定义是："一个文化共同体集体创作，这些创作以传统为依据、由某一群体或一些个体所表达并被认为是符合社区期望的作为其文化和社会特性的表达形式。"非物质文化遗产中听觉－视觉的文化事象是在特定的社会文化环境中生长起来的，并深植于特定的地理环境和相应的生活方式中的。而如今日益全球化的工业社会文化正对这些无形文化所赖以生存的环境造成严重威胁。

好在，现在"无形文化遗产"已经作为一个概念提出，政府及各种相关社会团体也都有了一些举措，比如，2002 年，亚太地区博物馆界的 150 名代表在上海博物馆发表了《上海宪章》，呼吁各博物馆在保护人类无形文化遗产的活动中发挥更大作用。2001 年 5 月 18 日，我国昆曲艺术被联合国教科文组织宣布为世界首批"人类口头和非物质遗产代表作"。2002 年的同一天（18 日），中国艺术研究院在北京召开抢救和保护中国口头和非物质遗产座谈会，正式激活"中国口头和非物质遗产的认证、抢救、保护、开发和利用工程"。目前，经过全国 5 万多文艺集成工作者 20 多年的努力，目前已经收集了约 60 亿字的文字资料、6 万张的图片资料、6 亿多字的曲谱、3 万多小时录音资料、5000 多小时的资料。但所有以上提到的这些措施都属于文化生态保护。

作为理论研究者来说，在思考文化遗产保护这个问题时，除了外在的、社会性的生态保护，还要看到内部结构的保护意义，可以从以下三个层面来看这个问题。

---

① 此文系笔者在 2003 年度 International Symposium on Preservation of the Arts Heritage of Chinese Ethnic Groups & Development of Contemporary Arts "中国少数民族艺术遗产保护及当代艺术发展国际学术研讨会"上提交的论文，已收入论文集 264－271 页。此处略有修改。

一、从文化的外部与内部理解文化

就“文化”这个词的本来意义来说，就是社会意识在物质载体上留下的印记、样式：如文字的“文”、纹身的“纹”、纹样的“纹”、文化的“文”，社会意识要互相传达，联合大家，统一大家，协调大家，需要有一种结构形式。对社会意识留下的结构形式给予充分的注意，才能研究文化本身。如果只描述社会生活环境、外部的边界条件，那还只是社会学的一个方面，还不能对文化本身进行深入的探讨。所以，对文化学这个词，在界定时，必须从两个方面，一方面是从社会生活的背景条件，另一方面就是这个载体本身的结构样态。每一个文化共同体都是在自己长期生存于斯的社会环境条件中凝练、锻造出符号化的“文”、“纹”，创造出属于自己的文化样式，该共同体中的成员可以从表面的结构样态立刻领悟到它外在的象征性和内在深层的文化源泉。研究文化遗产时，如果只描述社会生活环境和文化样态的外在表现，而忽略对内在结构的解剖研究，是不能充分了解其文化本身的。

二、文化学包含着社会学和形态学的双重表述

对我们而言，文化学必须是社会学方面的描述和它本身形态的描述缺一不可的。从音乐来讲，它的结构形态可以听见而不可看见，有它自己的独特性。尽管是独特性，但在结构形态这一点上是共同的——就是各种文化的物质载体都有它各种不同媒体的结构形态。因此对物质载体本身构成的结构形态要加以关怀。

中国幅原广阔，仅各地汉族民间音乐就呈现出完全迥异的结构形式，而众多少数民族各个不同的音乐形态面貌的形成就更是来源复杂，到现在为止，已有的研究成果多半还只是以描述为主。由于对特定文化品种所拥有的音乐形式缺少因果认识（即为什么这种文化产生了这样的音乐品种），常常会发生事与愿违的结果。比如，天主教的发展产生了唱诗班的机制和唱赞圣诗的音乐品种，那种独特的教义追求赋予音乐独特的品质，协和的合唱所形成的纯净的声音最适宜于表达向上飞升达到天堂的情感，这和尖顶式建筑所要表达的情感是一致的。合唱形式随着历史的变迁，在西方专业音乐领域已被发展成为一个具有高度作曲技术内涵的音乐品种，这是独特的文化内涵在具体文化事象发展过程中自然选择的艺术结构形式，并且已经发展到登峰造极高度的一种艺术品种。由于西方文化在生产力迅速发展的社会背景下，有了经济、政治和军事力量的支持，唱诗班合唱的形式随着强势文化被迅速传播到全世界，这种音乐形式本身便成为先进的、文明的象征，当然也就成为被学习、仿效的对象。这本来无可厚非，但问题是另一种文化引进这种音乐形式是否妥当，这在过去很长时间里考虑不足。

与佛教因果轮回观念相一致的是，佛教艺术发展出丰富的连环画式的经变画和讲唱经文的变文，通过叙事性艺术手法宣扬繁复的佛传与本生故事，并通过这种通俗易懂的艺术形式来弘扬佛法，用鲜花、宝物、香沐礼佛来表达对佛祖的敬慕。与唱给上帝听的唱诗班合唱不同的是，佛教音乐是唱给信徒们听的，是为教化更多信众而从事的一种宣佛活动，

即使是佛赞音乐也仍是唱给俗界的人听的，任何一个“局内人”心目中真正礼佛的音乐是俗界听不见的“不鼓自鸣”的天乐，它存在于佛徒的想象中。佛教石窟和寺院的修行方式不可能产生出唱诗班合唱的艺术形式，被称为佛教音乐的诵经重在持之以恒地虔诚吟诵经文，不断深化对经文教义的理解来修养身心，在外在形式上，因其不为悦人或悦神的目的而不追求更多音乐化的发展。

2003 年 11 月下旬的一天，中山音乐堂有一场台湾佛光山佛教音乐的表演。那是一种已经完全舞台化的演出，不仅借用了西方合唱形式，而且还请专业作曲家为合唱配了规模很大的乐队伴奏，声音、灯光、服装都很华丽。当然他们唱的都是经文，甚至在歌唱过程中加进一些模拟僧侣日常生活、功课的场景，但是，过分复杂华丽的音乐形式已经遮盖了经文的实际内容，听众的聆听状态也完全是在欣赏音乐作品而不是感受梵响。

作为中华民族传统文化遗产之一的佛教音乐，首先要从文化学意义上对它有个清楚的定位，如果承认它的功能是宣佛教化，它的结构形式就应是能以最大程度表达这个功能而存在的。所以从文化学的角度来分析佛光山梵响的表演形式和音乐体裁形式，与那位住持比丘尼在音乐会后的演讲中所说的，组织这个演唱梵响就是要弘扬佛法，以达到世人互相友爱的终极理想是不相适宜的。

三、文化形态学侧面的内涵是工艺学结构研究

音乐自身的存在是一种工艺结构的存在，而且，结构因素是最稳定的，已经有很多研究成果证明，许多现存的艺术品种，其自身结构的形成非常久远，它们如同一种文化品的 DNA，可以标志出遗传来源和变异方向。比如民间文学研究中的共同母题的变体研究，就是将母题作为一个结构因子，观察它的变化类型，追溯出变化来源以及刺激产生变化的社会及历史诱因。最终，从若干个现存的具有共同母题的文本解读出历史发展的信息。每一个打上人类烙印的文化事项经过各领域学者的研究解释，汇总起来就是人类文化发展的一部全方位发展史。

每一种音乐文化的存在都是作为它自己的工艺结构的存在。如果它没有自己独特的工艺结构存在，它也就消解、消失了。对这个观点，我们必须有清醒的认识。如果我们仅仅描述环境，而对它自身的工艺结构不注意，甚至于视而不见，听而不闻，也就谈不上对这个文化本身的真正研究。作为音乐学的研究学者，必须认识到结构形态学的研究不仅是专业内的一个基础性理论建设，同时还肩负着共同完成人类文化叙述的大任务。

谨举一个例子来说明在辨认一个民系在迁徙中文化传承的情况，结构形态所扮演的重要作用。

记得 20 多年以前，中国刚刚结束那段文化特殊时期，进口电影成为当时最隆重的文化享受，而那时常以电影节的形式一口气播放数部来自某国的电影。在一个墨西哥电影节上播放的一部名为《叶赛尼亚》的影片给我记忆深刻，因为那影片里一段吉卜赛人在广场舞蹈时演奏的音乐竟然是新疆人都非常熟悉的一首民歌。新疆人在聚会时常歌唱这段旋律，

根据场合即兴配上不同的歌词，现在还被流行歌手改编为流行歌曲。当时从未想过这其间的来龙去脉，随着时间的推移，这件事也就渐渐淡忘了。前几年，一个匈牙利国家吉卜赛乐团来中国演出，其中演奏的一首乐曲又一次引起我的注意，因为还是那首每个新疆人都熟悉的乐曲。而笔者曾在维也纳买到一片世界各地吉卜赛音乐集锦的光碟，其中一首来自罗马尼亚的民歌，其旋律框架与那首新疆民歌正如同一首母体民歌的不同变异，而且变异程度并不大，甚至可以立刻感受到两者间的联系。关于这个曲调的最后一个收集情况是，希腊人在1821年以后重新复兴自己本民族的音乐，现在演唱的许多所谓希腊民歌实际上是自那以后挖掘并传播开来的，其中有一首被经常传唱的竟然就是我们正在提到的这首曲调。现在无从考证传遍新疆的这首民歌来自哪里，始自何时，但新疆维吾尔族音乐文化与印度音乐文化之间的相似之处已有很多研究与叙述，如果新疆这首民歌的确与吉卜赛人的流浪有关，那令人惊讶的就不仅是音乐会随着人群迁移而被带到多么遥远的地方，最关键的是她的结构形态会被保持的那样隽永不褪色，在如此广泛的区域里的演绎，也能一下就被辨认出来。有些谱例可能会有较大的变形，但其基础的结构会被音乐学家的结构研究而提炼出来，从而辨认出是互相联系的。这首民歌给人的另一个启发是，正是因为其特别成熟的结构形式和强烈的精神气质，使她能跨越时空，严守自己的母体形式而不会在时间的推移中变得面目全非。又因为她所流行的人群持有相似的音律观念和节奏感受，因此她的特征性样态一直被保留下来了。

长期以来，由于民间音乐的工艺学价值没有得到充分研究，世世代代民间艺人们口口相传的技术理论缺少整理，现有的音乐分析理论又是建立在西方音乐理论基础之上的，所以对大量已经收集的音乐资料缺少形态分析的手段。对于东方音乐以发展旋律见长的音乐特征，音乐专业教育却缺少有关旋律学的课程建制，因而也就没有建立旋律学理论的迫切要求。随着20多年来音乐集成工作成果的逐渐出版，面对大量音响资料呈现出的复杂情况，越来越多的学者们注意到理论建设的不足，在这样的认识背景下，音乐学界于1998年、2000年分别在呼和浩特、香港两地举行过两届旋律学学术研讨会，这样的学术性活动是对民间音乐工艺学价值进行关注的具体举措，但由于不同学科间的横向联系不足，这种貌似纯音乐学的活动缺少文化学的认同。

民间音乐的原生样态只有得到了系统性理论保护，才不会在某种音乐形式倚仗着强大的经济、政治、甚至是军事势力猛袭而来时，丧失了自己的自信，盲从地把自己的丰腴之果嫁接在别人的文化之树上，这种文化失守的例子在20世纪初发生的太多了。五四新文化运动后，民间音乐被西学归来的人批评为粗糙、随意的，没有逻辑内涵，不能唤起一盘散沙的民众，所以要用西方乐理来改造民乐。今天我们以音乐文化学的眼光来反思历史，认识上应该有一个提升，那就是，由于缺少对旋律法在世代传承中发展成长起来的技术结构的分析总结，以及音乐形态所具有的审美意蕴表达力的剖析，在有严密系统化的西方音乐学理论面前，由衷地要对之产生钦佩之意就是很自然的。然而，这么多年的音乐学实践已经充分证明，西方音乐理论不适用中华民族音乐文化。

其实，在已有的研究基础上发现，旋律结构思维模式常常有很强的地方性，比如一个地区多采用某种结构模式，而另一个地方则多采用另一种结构模式，一些不同地方，但历史上有过迁徙联系，今天通行同类旋律结构思维模式。构成这种旋律结构的音律结构力来自哪里？各个民族在音律运动规律的共性基础上如何创造自己音乐文化的个性？这些无疑是音乐形态学范畴的重要内容。对活生生的音乐文本进行形态分析，梳理归类，可以为音乐文化学提供一些佐证，显示出形态学研究对音乐文化学的贡献，充实了音乐文化学的内容。同时，也反过来敦促我们进行旋律结构思维的文化学思考。

通过对实证材料的分析，寻找出各民族的社会意识在音乐这个品种上留下的印记、样式——音乐的结构形态，构成其结构形态的普遍规律和特殊规律，总结其方法体系，同时在研究过程中，提炼成理论教材应用于专业教学中，达到建立健全民族音乐理论的最终目标。当我们能够从理论上把握民间音乐工艺结构并能够运用它们，民间音乐这笔无形文化财富的传承就不再是那样脆弱易损了，不再只是依赖于个体的存在而存在了。

结语：

从以上三点来看，我们今后对音乐文化的研究除了田野调查，民俗、风俗描述，曲调收集等工作以外，还必须立足到音乐结构内部的、微观的研究，形态考察是不可少的。现有的民族音乐学的研究存在着不均衡现状。我们从田野调查、社会考察得来大量的民间音乐资料，需要理出本身的系统来，亟待建立起像匈牙利音乐学家巴托克、柯达伊曾致力建立的研究系统，当然这是中国民间音乐的研究系统。只有通过系统化综合研究所建立的音乐学科学理论，才能够使传统音乐文化资源在今后的音乐表演、音乐创作与音乐教育各领域中发挥其巨大的支撑、营养与导向作用。这一范围的系统化综合研究的经验与成果，将对其他范围的系统化综合研究提供借鉴与参照，带动这一崭新研究视角的传播推广。

后　记

完成这份书稿，颇有些“轻舟已过万重山”的感觉。

最初并没有要写这样一本书的想法，也绝没有这样的勇气。本是受约为王耀华、乔建中两位先生编辑的《音乐学概论》① 一书写“乐律学”一个章节。根据主编为各位撰稿人拟定的写作大纲，要求包括研究方法、学科发展历史、当今研究状况、学科发展的未来走向这样几个部分。考虑到乐律学作为音乐形态的构成基础，是音乐、数学、物理学交融的学科，在人类文明的发展历程中，无论哪一个民族率先达到了什么样的律学水平高度，这个成就都是人类共同的成就。无论音乐表象的音律变化多么丰富多彩，隐藏在音乐底层的乐音结合法则却是共同的。不同民族由于历史的、地理的、甚至是政治的机缘，掌握并选择了各自的音乐叙述方式。于是，在讨论学科发展历程这个部分，根据文献资料的时序，笔者采用不以国家、民族为单元，而是以律学新发现、新理论的创建时序作为叙述脉络。通过这样的梳理，清楚地看到在人类文明的最初积累期，四大文明的主人以各具特色的表达方式告诉后人，他们不约而同地达到了对乐音关系基本法则的共同认识，在人类认识自然声音世界的知识方面，达到了同样的高度。这种共时性观察角度应该说是得益于音乐人类学的基本立场。

当为《音乐学概论》交出一份长达五万字的文稿时，却着实让编者为难了。比较其他各章节，这部分显得过于庞大，需得删减些篇幅。蒙耀华先生器重，看出这份文稿的基础是可以大大发挥的，也看出了笔者的言犹未尽、欲罢不能。于是，他又约我将此文稿“增肥”成一份书稿，放在他主持的《中国传统音乐学》系列丛书中。我却再一次犯了糊涂，写成了这样一本《东西方乐律学研究及发展历程》。可耀华先生的计划是以全面整理中国的传统学术为重点的，当然应该顾全大局。于是抽出中国部分，调整了叙述框架，更名为《中国传统律学》，加入到那套丛书中。

在写作这本书稿之初，原本的写作思路是要在东西方自古至今这样一个大时空中看乐律学的发展，通过文献对东西方的乐律学研究及发展作比较性的探讨，在展示人类认识音乐内在规律过程中所表现出的智慧与所犯过失的同时，对现实也是很有启迪意义的。这样不仅能分析归纳出这个学科的学术贡献在历史音乐文化长河中的价值意义、在音乐学系统理论建设中的重要作用，也想通过这个历史叙事本身，反映我们目前对这个学科的误解和运用缺失。

---

① 该书已于2005年夏正式出版。

相对于书名中“乐律学”三个字，全书并没有纯粹乐学的内容，所以添加这个字，并将东西方的乐律学研究方法及成果放在一个平台上来展示，是想说明中外的律学研究一直都是为了解决音乐实践中的具体问题而进行的。所以，《东西方乐律学研究及发展历程》这本书稿并不是《中国传统律学》的增订版，而是一个完整表达笔者有关乐律学方面的学习心得。感谢俞人豪先生及中央音乐学院出版社对学术著作的支持，于是这份完整版本的书稿有望付梓。

人们总说工作的过程就是学习的过程，在写作这本书的同时，也是我再学习的过程。由于在稿约的重压下，这样集中地学习、思考、比较各民族的律学成果，是一种非常好的学习方式，对我无疑是件好事。在阅读、理解古今中外重要律学文献的过程中，我自己的律学认识也更全面系统了，回想前些年所做的“中立音”专题研究，还应该放在一个更深刻而立体的律学历史背景下关照。

由于目前教学中理论律学的空白，音乐形态学的学习与研究因此也显得缺少底气。许多年前，那些只坐在书斋里不关注活生生的音乐生活的理论家们曾被揶揄为“扶手椅里的学者”。而现在面临的却是太多的从田野带来的现实文本无从处理的难堪。有感于音乐学基础理论建设的不足，也被许多同行同道在基础领域里努力建设的敬业精神所激励，这本拙作也算是为音乐学基础理论建设的一份贡献吧。